

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI  
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

**La matematica dell'incertezza.  
Riflessioni sulle valutazioni nazionali e  
internazionali: un approccio sperimentale in  
classe.**

**Tesi di Laurea in Didattica della Matematica**

**Relatore:**  
**Chiar.mo Prof.**  
**GIORGIO BOLONDI**

**Presentata da:**  
**GIOVANNI BIGUCCI**

**Prima Sessione**  
**Anno Accademico 2011-2012**

... *“Vuoi dirmi che strada dovrei prendere per uscire di qui?”*

*“Dipende molto da dove vuoi andare”*

*“Non m’importa molto dove...”*

*“Allora non importa quale strada prendi!”*



# Introduzione

L'idea della tesi nasce da una esperienza personale; infatti, mi sono accorto di non aver mai affrontato argomenti di probabilità e statistica all'interno del percorso di studi pre-universitario e di condividere questa mancanza con molti dei miei colleghi universitari.

Sebbene sia riconosciuta da tutti l'importanza della matematica dell'incertezza, per il suo valore in ambito scientifico e non solo, e nonostante lo studio della stessa sia fortemente auspicato nelle indicazioni nazionali e negli assi culturali redatti dal ministero dell'istruzione, ancora non trova il giusto spazio all'interno della prassi scolastica. Da qui si è sviluppata l'idea di analizzare in maniera trasversale l'argomento da un punto di vista didattico, cercando di rispondere ad alcune domande:

1. Che cosa i ragazzi dovrebbero sapere all'interno di questo ambito della matematica?
2. Che cosa i ragazzi realmente sanno?
3. E, infine, quali sono i punti di forza, quali le difficoltà dei ragazzi nell'approcciarsi alla materia?

A queste tre domande si è cercato di rispondere nei tre capitoli della tesi, cercando di fornire un quadro generale che può essere utile per comprendere alcuni aspetti dell'insegnamento della matematica dell'incertezza. La prima domanda trova una facile risposta nella raccolta dei documenti ministeriali e nell'esame dei quadri di riferimento delle più accreditate prove di valutazione

nazionali e internazionali. La seconda, più ardua della precedente, trova risposta nell'interpretazione dei risultati delle prove di valutazione tenendo conto delle peculiarità e delle specificità di ognuna. Alla terza domanda si è cercato di rispondere con un piccolo lavoro di ricerca, consistito nella somministrazione di un questionario, dal quale sono emersi alcuni risultati interessanti che forniscono una risposta alla richiesta, ma ovviamente non esaustiva.

# Indice

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Introduzione</b>  | <b>i</b>  |
| <b>1 Che cosa i ragazzi dovrebbero sapere!</b>               | <b>1</b>  |
| 1.1 L'obbligo d'istruzione e gli assi culturali . . . . .    | 1         |
| 1.2 Le indicazioni di legge . . . . .                        | 4         |
| 1.3 I Quadri di riferimento di IEA-TIMMS, OCSE-PISA, INVALSI | 6         |
| 1.3.1 Quadro di Riferimento di IEA-TIMMS 2011 . . . . .      | 7         |
| 1.3.2 Quadro di Riferimento di OCSE-PISA 2012 . . . . .      | 10        |
| 1.3.3 Quadro di Riferimento della prova INVALSI 2011 . . . . | 14        |
| <b>2 Che cosa i ragazzi realmente fanno!</b>                 | <b>17</b> |
| 2.1 Risultati da PISA 2003 a PISA 2009 . . . . .             | 17        |
| 2.2 Risultati della prova INVALSI 2011 . . . . .             | 22        |
| <b>3 La sperimentazione in classe</b>                        | <b>25</b> |
| 3.1 Le domande preliminari . . . . .                         | 26        |
| 3.2 I risultati del questionario . . . . .                   | 29        |
| <b>Conclusioni</b>   | <b>49</b> |
| <b>Bibliografia</b>  | <b>51</b> |
| <b>A Il questionario</b>                                     | <b>55</b> |



# Capitolo 1

## Che cosa i ragazzi dovrebbero sapere!

In questo primo capitolo vengono raccolti ed elencati tutti i documenti che riguardano i saperi e le competenze che un ragazzo dovrebbe acquisire alla fine del primo biennio della scuola secondaria di secondo grado in Italia nel particolare ambito della matematica dell'incertezza.

Riusciamo, così, ad avere una idea più precisa di quali siano gli elementi più importanti di un avvenuto apprendimento e ad avere delle linee guida per le valutazioni e riflessioni oggetto della tesi.

### 1.1 L'obbligo d'istruzione e gli assi culturali

La legge che regola l'obbligo di istruzione in Italia <sup>1</sup> fornisce anche, su suggerimento del parlamento Europeo, gli assi culturali che hanno l'obiettivo di chiarire quali siano le competenze che un cittadino deve possedere per sapersi orientare nei diversi contesti del mondo contemporaneo.

Nell'asse matematico vengono elencate e approfondite le quattro principali *competenze di base a conclusione dell'obbligo di istruzione*:

---

<sup>1</sup>Dal primo settembre 2007 è entrato in vigore l'obbligo d'istruzione elevato a 10 anni in base alla legge 26 dicembre 2006, n. 296, articolo 1, comma 622



1. utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico ed algebrico rappresentandole anche sotto forma grafica;
2. confrontare ed analizzare figure geometriche individuando invarianti e relazioni;
3. individuare le strategie appropriate per la soluzione di problemi;
4. analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico.

Ognuna delle competenze si fonda su abilità e conoscenze specifiche che analizzeremo, grazie alla tabella in figura 1.1, solo relativamente all'ultima delle quattro.

Possiamo notare come, nel documento, sia posta al centro l'analisi dei dati, intesa come sistemazione e interpretazione, soprattutto attraverso forme di rappresentazioni molto utilizzate e la ricerca di relazioni fra i dati, non trascurando le parti relative all'incertezza e all'approssimazione, fondamentali nella costruzione di modelli matematici.

Inoltre, viene valorizzato il ruolo delle applicazioni informatiche nella gestione ed elaborazione dei dati, facendo riferimento all'utilizzo di fogli elettronici sia come supporti grafici, sia come calcolatori.

Il testo non accenna esplicitamente al tema della "previsione" e ad applicazioni concrete che rendono la sistemazione e la gestione dei dati così importanti, forse sottintendendoli oppure ritenendoli passi successivi di cui quelli citati costituiscono le fondamenta.

| Competenze  | Abilità/capacità  | Conoscenze  |
|---|---|---|
| <b>Analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico</b> | <p>Raccogliere, organizzare e rappresentare un insieme di dati</p> <p>Rappresentare classi di dati mediante istogrammi e diagrammi a torta</p> <p>Leggere e interpretare tabelle e grafici in termini di corrispondenze fra elementi di due insiemi</p> <p>Riconoscere una relazione tra variabili, in termini di proporzionalità diretta o inversa e formalizzarla attraverso una funzione matematica</p> <p>Rappresentare sul piano cartesiano il grafico di una funzione</p> <p>Valutare l'ordine di grandezza di un risultato</p> <p>Elaborare e gestire semplici calcoli attraverso un foglio elettronico</p> <p>Elaborare e gestire un foglio elettronico per rappresentare in forma grafica i risultati dei calcoli eseguiti</p> | <p>Significato di analisi e organizzazione di dati numerici</p> <p>Il piano cartesiano e il concetto di funzione</p> <p>Funzioni di proporzionalità diretta, inversa e relativi grafici, funzione lineare</p> <p>Incertezza di una misura e concetto di errore</p> <p>La notazione scientifica per i numeri reali</p> <p>Il concetto e i metodi di approssimazione</p> <p>I numeri "macchina"</p> <p>Il concetto di approssimazione</p> <p>Semplici applicazioni che consentono di creare, elaborare un foglio elettronico con le forme grafiche corrispondenti</p> |

Figura 1.1: La quarta competenza di base

## 1.2 Le indicazioni di legge

Le Indicazioni Nazionali degli obiettivi specifici di apprendimento<sup>2</sup> forniscono la declinazione disciplinare del Profilo educativo, culturale e professionale dello studente a conclusione dei percorsi liceali, tecnici e professionali. Il Profilo e le Indicazioni costituiscono, dunque, un canovaccio grazie al quale le istituzioni scolastiche costruiscono il proprio Piano dell'offerta formativa, i docenti possono elaborare i propri percorsi didattici e agli studenti sono chiariti gli obiettivi di apprendimento e le competenze da maturare.

Riportiamo di seguito le indicazioni di matematica nel particolare ambito dati e previsioni per il primo biennio del Liceo Scientifico (che non presenta significative differenze rispetto alle indicazioni per gli altri licei).

*Lo studente sarà in grado di rappresentare e analizzare in diversi modi (anche utilizzando strumenti informatici) un insieme di dati, scegliendo le rappresentazioni più idonee. Saprà distinguere tra caratteri qualitativi, quantitativi discreti e quantitativi continui, operare con distribuzioni di frequenze e rappresentarle. Saranno studiate le definizioni e le proprietà dei valori medi e delle misure di variabilità, nonché l'uso strumenti di calcolo (calcolatrice, foglio di calcolo) per analizzare raccolte di dati e serie statistiche. Lo studio sarà svolto il più possibile in collegamento con le altre discipline anche in ambiti entro cui i dati siano raccolti direttamente dagli studenti. Lo studente sarà in grado di ricavare semplici inferenze dai diagrammi statistici. Egli apprenderà la nozione di probabilità, con esempi tratti da contesti classici e con l'introduzione di nozioni di statistica. Sarà approfondito in modo rigoroso il concetto di modello matematico, distinguendone la specificità concettuale e metodica rispetto all'approccio della fisica classica.*

---

<sup>2</sup>Regolamenti di riordino dei licei, degli istituti tecnici e degli istituti professionali emanati dal Presidente della Repubblica in data 15 marzo 2010

E ora riportiamo le indicazioni, suddivise in conoscenze e abilità, per il primo biennio degli istituti tecnici (che non presenta significative differenze rispetto alle indicazioni per gli istituti professionali).

**Conoscenze:** *dati, loro organizzazione e rappresentazione; distribuzioni delle frequenze a seconda del tipo di carattere e principali rappresentazioni grafiche; Valori medi e misure di variabilità; significato della probabilità e sue valutazioni; semplici spazi (discreti) di probabilità (eventi disgiunti, probabilità composta, eventi indipendenti); Probabilità e frequenza.*

**Abilità:** *raccogliere, organizzare e rappresentare un insieme di dati; calcolare i valori medi e alcune misure di variabilità di una distribuzione; calcolare la probabilità di eventi elementari.*

Nelle nuove indicazioni per i bienni emerge una attenzione che mai era stata data all'ambito della matematica dell'incertezza prima d'ora; ormai la statistica e la probabilità svolgono un ruolo importantissimo nella matematica moderna e contemporaneamente un cittadino consapevole deve possedere la capacità di elaborare modelli per gestire dati e per prevedere fenomeni.

Non vi sono grandi differenze fra le linee guida per i bienni di licei e istituti tecnici e professionali: inizialmente si approfondisce la tematica dell'organizzazione e interpretazione dei dati e successivamente si introduce la probabilità.

Nei licei viene suggerito di affrontare la materia con il supporto di strumenti informatici e in collegamento con le altre discipline; inoltre viene sottolineata l'importanza di mettere i ragazzi nella condizione di operare in prima

persona nella raccolta dei dati e loro sistemazione. L'aspetto più interessante è che si pone al centro il concetto di modello matematico che risulta essere il cuore dell'apprendimento perché permette di conoscere e interpretare la realtà con le conoscenze e abilità acquisite in questo settore.

Negli istituti tecnici e professionali le linee guida sono più pragmatiche e schematiche: vengono citati gli strumenti principali per la rappresentazione e interpretazione dei dati (valori medi e misure di variabilità) e i concetti principali del calcolo delle probabilità. A differenza del testo precedente non viene suggerito il supporto di strumenti informatici, già utilizzati in altre discipline specifiche e non vi è nessun suggerimento metodologico.

### **1.3 I Quadri di riferimento di IEA-TIMMS, OCSE-PISA, INVALSI**

Negli ultimi anni si sono sviluppati progetti internazionali e nazionali che valutano le competenze degli studenti durante e al termine del percorso di studi nei diversi ambiti disciplinari, anche se con finalità e metodologie diverse fra loro. I risultati della valutazione sono preziosi spunti di riflessione e sono sempre di più presi in considerazione dalle istituzioni, dai ricercatori, dai docenti, da chi gravita attorno al mondo della scuola e dell'apprendimento scolastico e non solo. Per quanto riguarda la tesi, offrono un ottimo quadro generale di ciò che un ragazzo dovrebbe sapere e saper fare in matematica ed in particolare nell'ambito prescelto al termine dell'obbligo d'istruzione. Nei tre paragrafi seguenti verranno descritti i quadri di riferimento di matematica

## **1.3 I Quadri di riferimento di IEA-TIMMS, OCSE-PISA, INVALSI 7**

---

più recenti di due indagini internazionali IEA-TIMMS<sup>3</sup> e OCSE-PISA<sup>4</sup> e di una nazionale INVALSI<sup>5</sup>.

### **1.3.1 Quadro di Riferimento di IEA-TIMMS 2011**

L'indagine TIMSS 2011 (Trends in International Mathematics and Science Study) è il quinto ciclo di un progetto internazionale promosso dalla IEA (International Association for the Evaluation of Educational Assessment) che analizza il rendimento degli studenti in Matematica e Scienze in oltre 60 Paesi. L'indagine TIMSS valuta la performance degli studenti relativamente al quarto e all'ottavo anno di scolarità (IV classe della scuola primaria e III

---

<sup>3</sup>L'indagine TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study), giunta al quinto ciclo nel 2011, è una ricerca internazionale promossa dalla IEA (International Association for the Evaluation of Educational Assessment) e analizza il rendimento degli studenti in Matematica e Scienze in oltre 60 Paesi. L'indagine TIMSS misura la performance degli studenti relativamente alla IV classe della scuola primaria e III secondaria di I grado e monitora l'implementazione dei curricula scolastici nei Paesi partecipanti all'indagine.

<sup>4</sup>PISA (Programme for International Student Assessment) è un'indagine promossa dall'OCSE (Organizzazione per la Cooperazione e lo Sviluppo Economico) con l'obiettivo di misurare le competenze degli studenti in matematica, scienze, lettura e problem solving. Per ogni ciclo di PISA viene approfondito un ambito in particolare: PISA 2012, quinto ciclo del progetto, ha come domini principali la competenza in matematica e in problem solving. Quest'ultimo ambito, essendo composto di prove informatizzate, sarà proposto nel sotto-campione di scuole che svolgerà le somministrazioni computerizzate oltre che cartacee.

<sup>5</sup>L'INVALSI è l'ente di ricerca dotato di personalità giuridica di diritto pubblico che ha raccolto, in un lungo e costante processo di trasformazione, l'eredità del Centro Europeo dell'Educazione (CEDE) istituito nei primi anni settanta del secolo scorso. Sulla base delle vigenti Leggi, che sono frutto di un'evoluzione normativa significativamente sempre più incentrata sugli aspetti valutativi e qualitativi del sistema scolastico, l'Istituto, fra le altre attività, effettua verifiche periodiche e sistematiche sulle conoscenze e abilità degli studenti e sulla qualità complessiva dell'offerta formativa delle istituzioni di istruzione e di istruzione e formazione professionale, anche nel contesto dell'apprendimento permanente; in particolare gestisce il Sistema Nazionale di Valutazione (SNV).

secondaria di I grado) e segue da vicino la redazione dei curricoli scolastici nei Paesi che partecipano al progetto.

Il quadro di riferimento di matematica delle valutazioni per entrambe le classi è organizzato in due dimensioni: i **contenuti** in cui vengono specificati gli ambiti e gli argomenti da analizzare in matematica (numero, algebra, geometria e dati e probabilità nella terza secondaria di I grado), e i **domini cognitivi** in cui vengono specificati le abilità cognitive e i processi di pensiero da analizzare (conoscenza, applicazione e ragionamento).

Il dominio dei contenuti *dati e probabilità* comprende le seguenti tre aree di argomenti:

- Organizzazione e rappresentazione dei dati.
- Interpretazione dei dati.
- Probabilità.

In particolare per ognuna delle tre aree vengono specificati ed analizzati i contenuti: anche se il quadro di riferimento descrive i contenuti da apprendere entro la fine della terza secondaria di I grado, è evidente la vicinanza con le indicazioni nazionali per i bienni che sono state descritte in precedenza. Ripotiamo un estratto del Quadro di Riferimento di IEA-TIMMS 2007 dove sono elencati i contenuti dell'area *dati e previsioni*.

#### **Organizzazione e rappresentazione dei dati:**

1. Leggere dati da tabelle, pittogrammi, istogrammi, aerogrammi e grafici lineari.
2. Organizzare e rappresentare dati utilizzando tabelle, pittogrammi, istogrammi, aerogrammi e grafici lineari.
3. Confrontare e correlare rappresentazioni diverse degli stessi dati.

#### **Interpretazione dei dati:**

### 1.3 I Quadri di riferimento di IEA-TIMMS, OCSE-PISA, INVALSI 9

---

1. Identificare, calcolare e confrontare caratteristiche di insiemi di dati, compresi media, mediana, intervallo e forma della distribuzione (in termini generali).
2. Usare e interpretare un insieme di dati per rispondere a domande e risolvere problemi (ad esempio, trarre conclusioni, fare previsioni e stimare valori tra i punti forniti e oltre questi).
3. Riconoscere e descrivere modi di organizzare e rappresentare dati che potrebbero essere erroneamente interpretati (ad esempio, raggruppamenti impropri, scale ingannevoli o distorte).

#### **Probabilità:**

1. Stimare “l’opportunità” di un risultato come certa, più probabile, ugualmente probabile, meno probabile o impossibile.
2. Usare dati ricavati da esperimenti per predire le probabilità di futuri risultati; usare le probabilità di un particolare risultato per risolvere problemi; determinare le probabilità di possibili risultati.

Per quanto riguarda i domini cognitivi, il primo dominio, *conoscenza*, riguarda le procedure e i concetti che gli studenti devono conoscere, mentre il secondo, *applicazione*, riguarda l’abilità degli studenti di applicare nozioni e conoscenze concettuali per rispondere a quesiti o risolvere problemi. Il terzo dominio, *ragionamento*, include situazioni non familiari, contesti meno usuali e problemi da risolvere in più fasi.

Il dominio cognitivo *conoscenza* considera i seguenti comportamenti: ricordare, riconoscere, eseguire calcoli, recuperare informazioni, misurare e classificare/ordinare.

Il dominio *applicazione* considera i comportamenti: scegliere, rappresentare, modellizzare, implementare e risolvere problemi di routine.

Il dominio *ragionamento*, invece, considera i comportamenti: analizzare, generalizzare, sintetizzare/integrare, giustificare e risolvere problemi non di routine.



### 1.3.2 Quadro di Riferimento di OCSE-PISA 2012

PISA 2012 è la quinta edizione di PISA (Programme for International Student Assessment) un'indagine dell'OCSE (Organizzazione per la Cooperazione e lo Sviluppo Economico) che ha l'obiettivo di valutare le competenze degli studenti in matematica, scienze, lettura e problem solving.

La popolazione oggetto di indagine è quella degli studenti quindicenni e PISA 2012 ha come domini principali la competenza in matematica e in problem solving. Riportiamo la traduzione di un estratto del *framework* di PISA 2012 che chiarisce che cosa si intende per competenza matematica e per problem solving.

*Per **competenza matematica** (literacy) si intende la capacità di un individuo di utilizzare e interpretare la matematica e di darne rappresentazione mediante formule, in una varietà di contesti. Tale competenza comprende la capacità di ragionare in modo matematico e di utilizzare concetti, procedure, dati e strumenti di carattere matematico per descrivere, spiegare e prevedere fenomeni. Aiuta gli individui a riconoscere il ruolo che la matematica gioca nel mondo, a operare valutazioni e a prendere decisioni fondate che consentano loro di essere cittadini impegnati, riflessivi e con un ruolo costruttivo.*

*Per **problem solving** si intende la capacità di un individuo di mettere in atto processi cognitivi per comprendere e risolvere situazioni problematiche per le quali il percorso di soluzione non è immediatamente evidente. Questa competenza comprende la volontà di confrontarsi con tali situazioni al fine di realizzare le proprie potenzialità in quanto cittadini riflessivi e con un ruolo costruttivo.*

La competenza matematica viene valutata in relazione al **contenuto matematico** definito in riferimento a quattro categorie principali (cambiamento e relazioni, spazio e forma, quantità, incertezza e dati), ai **processi matematici** definiti attraverso le competenze matematiche generali, e alle **situazioni** in cui la matematica è utilizzata (personale, scolastica,

### **1.3 I Quadri di riferimento di IEA-TIMMS, OCSE-PISA, INVALSI**

---

occupazionale, pubblica e scientifica).

L'area dei contenuti *incertezza e dati* viene scomposta nelle sezioni:

- Produzione di dati (metodi validi per misurare determinate caratteristiche; indagine statistica).
- Analisi dei dati e loro visualizzazione e rappresentazione grafica.
- Probabilità.

I tre processi matematici, utilizzati per la restituzione dei risultati sono:

1. Formulare: riguarda l'identificare le opportunità di applicare e usare la matematica, riconoscendo quali strumenti possono essere utilizzati per comprendere o risolvere un problema.
2. Applicare: riguarda il mettere in campo ragionamenti matematici e l'utilizzare i concetti, le procedure, i fatti e gli strumenti della matematica per trovare una soluzione.
3. Interpretare: riguarda la riflessione sulle soluzioni o i risultati matematici e l'interpretazione nel contesto di un problema o di un quesito.

Infine vengono riportate le tabelle che esauriscono le possibili relazioni fra i processi matematici e le fondamentali capacità matematiche che si trovano nel Framework di PISA 2012; aspettando la traduzione ufficiale del framework riportiamo le tabelle in lingua originale.

|                               | <b><i>Formulating situations mathematically</i></b>  | <b><i>Employing mathematical concepts, facts, procedures, and reasoning</i></b>   | <b><i>Interpreting, applying, and evaluating mathematical outcomes</i></b>  |
|-------------------------------|--|---|---|
| <b>Communicating</b>          | Read, decode, and make sense of statements, questions, tasks, objects, images, or animations (in computer-based assessment) in order to form a mental model of the situation | Articulate a solution, show the work involved in reaching a solution and/or summarize and present intermediate mathematical results   | Construct and communicate explanations and arguments in the context of the problem  |
| <b>Mathematizing</b>          | Identify the underlying mathematical variables and structures in the real world problem, and make assumptions so that they can be used                                       | Conceptualize the problem mathematically or interpret the solution within the context of the original problem (may be needed in problems whose major emphasis is on <i>employing</i> )  | Understand the extent and limits of a mathematical solution that are a consequence of the mathematical model employed.  |
| <b>Representation</b>         | Represent <sup>4</sup> real-world information mathematically   | Make sense of, relate, and use a variety of representations when interacting with a problem   | Interpret mathematical outcomes in a variety of formats in relation to a situation or use; compare or evaluate two or more representations in relation to a situation |
| <b>Reasoning and argument</b> | Explain, defend, or provide a justification for the identified or devised representation of a real-world situation   | Explain, defend, or provide a justification for the processes and procedures used to determine a mathematical result or solution<br><br>Connect pieces of information to arrive at a mathematical solution, make generalizations, or create a multi-step argument | Reflect on mathematical solutions and create explanations and arguments that support, refute, or qualify a mathematical solution to a contextualized problem          |

Figura 1.2: Relazioni fra i processi matematici (prima riga) e le fondamentali capacità matematiche (prima colonna)

### 1.3 I Quadri di riferimento di IEA-TIMMS, OCSE-PISA, INVALSI<sup>13</sup>

|   | <b><i>Formulating situations mathematically</i></b>   | <b><i>Employing mathematical concepts, facts, procedures, and reasoning</i></b>   | <b><i>Interpreting, applying, and evaluating mathematical outcomes</i></b>  |
|---|---|---|---|
| <b>Devising strategies for solving problems</b>                     | Select or devise a plan or strategy to mathematically reframe contextualized problems   | Activate effective and sustained control mechanisms across a multi-step procedure leading to a mathematical solution, conclusion, or generalization             | Devise and implement a strategy in order to interpret, evaluate, and validate a mathematical solution to a contextualized problem   |
| <b>Using symbolic, formal and technical language and operations</b> | Use appropriate variables, symbols, diagrams, and standard models in order to represent a real-world problem using symbolic/formal language | Understand and utilize formal constructs based on definitions, rules and formal systems as well as employing algorithms   | Understand the relationship between the context of the problem and representation of the mathematical solution. Use this understanding to help interpret the solution in context and gauge the feasibility and possible limitations of the solution |
| <b>Using mathematical tools</b>                                     | Use mathematical tools <sup>5</sup> in order to recognize mathematical structures or to portray mathematical relationships                  | Know about and be able to make appropriate use of various tools that may assist in implementing processes and procedures for determining mathematical solutions | Use mathematical tools to ascertain the reasonableness of a mathematical solution and any limits and constraints on that solution, given the context of the problem   |

Figura 1.3: Relazioni fra i processi matematici (prima riga) e le fondamentali capacità matematiche (prima colonna)

### 1.3.3 Quadro di Riferimento della prova INVALSI 2011

In attesa di un quadro di riferimento che tenga conto delle Nuove Indicazioni Nazionali per il sistema dei licei e per l'Istruzione Tecnica, la prova del 2011 dell'Invalsi per la scuola secondaria di secondo grado è stata costruita a partire dai principi generali contenuti nel QdR (quadro di riferimento) elaborato per il primo ciclo, seguendo le indicazioni presenti nella normativa relativa all'adempimento dell'obbligo d'istruzione.

In linea con le principali indagini internazionali, il QdR specifica e descrive le due aree grazie alle quali vengono costruiti i quesiti e secondo le quali vengono interpretati i risultati: i **contenuti matematici** e i **processi coinvolti**.

I quattro ambiti di contenuti, perfettamente in accordo con le indicazioni di legge e le rilevazioni internazionali, sono: *Numeri, Spazio e figure, Relazioni e funzioni, Dati e previsioni*.

I processi in base ai quali vengono organizzate le domande, individuati in continuità con quelli del primo ciclo sono:

1. Conoscere e padroneggiare i contenuti specifici della matematica (oggetti matematici, proprietà, strutture).
2. Conoscere e padroneggiare algoritmi e procedure (in tutti gli ambiti, non solo quello aritmetico).
3. Conoscere e padroneggiare diverse forme di rappresentazioni e saper passare da una all'altra (verbale, scritta, simbolica, grafica...).
4. Saper risolvere problemi utilizzando gli strumenti della matematica.
5. Saper riconoscere il carattere misurabile di oggetti e fenomeni e saper utilizzare strumenti di misura.
6. Acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero matematico (congetturare, verificare, giustificare, definire, argomentare, generalizzare, dimostrare...).

### **1.3 I Quadri di riferimento di IEA-TIMMS, OCSE-PISA, INVALSI**

---

7. Utilizzare la matematica per il trattamento quantitativo dell'informazione (descrivere un fenomeno in termini quantitativi, interpretare la descrizione di un fenomeno con strumenti statistici, utilizzare modelli matematici...).
8. Saper riconoscere le forme nello spazio (riconoscere forme in diverse rappresentazioni, individuare relazioni tra forme, immagini o rappresentazioni visive, visualizzare oggetti tridimensionali a partire da una rappresentazione bidimensionale e, viceversa, rappresentare sul piano una figura solida, saper cogliere le proprietà degli oggetti e le loro relative posizioni...).

La direzione dei processi è particolarmente importante perchè fornisce informazioni utili per il lavoro in classe, ma si deve tenere presente che sono classificazioni da non prendere in maniera troppo rigida perchè il loro scopo principale è quello di guidare nell'interpretazione dei risultati e non di esaurire e descrivere tutti i processi coinvolti in matematica.



## Capitolo 2

# Che cosa i ragazzi realmente fanno!

Dopo aver analizzato ciò che i ragazzi dovrebbero sapere riguardo alla matematica dell'incertezza, verranno proposti i risultati di due progetti di valutazione per meglio comprendere quale sia il livello di competenza dei ragazzi, in questo ambito, al termine dell'obbligo d'istruzione. Inizialmente verranno proposti i risultati del progetto internazionale OCSE-PISA e successivamente della prova nazionale INVALSI del 2011. Dal primo approfondimento avremo informazioni sulla situazione dei ragazzi italiani nei confronti dei coetanei del resto del mondo, dal secondo trarremo notizie più precise sul contesto italiano: in entrambi i casi i risultati verranno analizzati e descritti in base al quadro di riferimento del singolo progetto.

### 2.1 Risultati da PISA 2003 a PISA 2009

Nella valutazione del progetto PISA non si rileva la padronanza dei contenuti curricolari, ma la capacità di analizzare, ragionare e comunicare in modo efficace nel momento in cui ci si trova di fronte a problemi della vita quotidiana e ci si deve avvalere delle competenze apprese nel percorso scolastico. Dobbiamo, quindi, interpretare i risultati non come un giudizio sugli



apprendimenti dei contenuti curricolari in Italia, ma come uno strumento che ci permette di confrontare il livello di competenza italiano con i paesi dell'OCSE. La matematica è stata la materia principale dell'indagine PISA 2003 e il punteggio medio nella scala di competenza matematica è stato fissato a 500 per i Paesi OCSE: il punteggio medio è il riferimento con il quale sono state confrontate le prestazioni degli studenti in matematica nei progetti successivi PISA 2006 e PISA 2009. Attendendo i dati di PISA 2012 che vedrà ancora come materia principale la matematica, dobbiamo riferirci al rapporto finale di PISA 2009 in cui gli studenti sono stati sottoposti ad un minor numero di quesiti e tenere sott'occhio il rapporto del 2003.

Nell'immagine 2.1 vengono illustrati i livelli di competenza matematica che in linea con il quadro di riferimento ci permettono di suddividere i ragazzi in fasce con competenza sempre più elevata e viene indicata la percentuale di studenti dei paesi OCSE e di studenti italiani che si collocano a ciascun livello.

Si può notare come ai livelli più alti la percentuale italiana sia inferiore rispetto alla media OCSE, addirittura al sesto livello è la metà, sintomo di una mancanza di ragazzi italiani che abbiano competenze molto elevate.

In Italia, la media punti di matematica è 483, non di molto inferiore rispetto alla media che nel 2009 è stata valutata 496 e migliore rispetto alle valutazioni precedenti (462 nel 2006 e 466 nel 2003); il dato, però, nasconde notevoli differenze interne alla popolazione. Infatti, il risultato varia significativamente se, per esempio, analizziamo aree geografiche e tipologie di scuole diverse.

L'ambito in cui i ragazzi italiani sono risultati più deboli è *cambiamento e relazioni*, subito seguito a ruota da *dati e previsioni*. La carenza in questi due ambiti può essere riscontrata nell'esame delle domande a loro dedicate che sono risultate le più "difficili".

Fra le domande risultate più difficili in PISA 2003 (sono stati considerati difficili i quesiti con una percentuale di risposte errate o omesse superiore almeno del 15% rispetto a quella della media OCSE) vi sono 9 quesiti che

| Livello  | Punteggio limite inferiore | Percentuale di studenti in grado di svolgere i compiti del livello considerato o dei livelli superiori* | Competenze necessarie a risolvere i compiti proposti e caratteristiche dei compiti stessi   |
|----------|----------------------------|---|---|
| <b>6</b> | 669                        | OCSE: 3,1%<br><br>Italia: 1,6 %   | Gli studenti che si collocano al 6° Livello sono in grado di concettualizzare, generalizzare e utilizzare informazioni basate sulla propria analisi e modellizzazione di situazioni problematiche e complesse. Essi sono in grado di collegare fra loro differenti fonti d'informazione e rappresentazioni passando dall'una all'altra in maniera flessibile. A questo livello, gli studenti sono capaci di pensare e ragionare in modo matematicamente avanzato. Essi sono inoltre in grado di applicare tali capacità di scoperta e di comprensione contestualmente alla padronanza di operazioni e di relazioni matematiche di tipo simbolico e formale in modo da sviluppare nuovi approcci e nuove strategie nell'affrontare situazioni inedite. A questo livello, gli studenti sono anche capaci di esporre e di comunicare con precisione le proprie azioni e riflessioni collegando i risultati raggiunti, le interpretazioni e le argomentazioni alla situazione nuova che si trovano ad affrontare. |
| <b>5</b> | 607                        | OCSE: 12,7 %<br><br>Italia: 9 %   | Gli studenti che si collocano al 5° Livello sono in grado di sviluppare modelli di situazioni complesse e di servirsi, di identificare vincoli e di precisare le assunzioni fatte. Essi sono inoltre in grado di selezionare, comparare e valutare strategie appropriate per risolvere problemi complessi legati a tali modelli. A questo livello, inoltre, gli studenti sono capaci di sviluppare strategie, utilizzando abilità logiche e di ragionamento ampie e ben sviluppate, appropriate rappresentazioni, strutture simboliche e formali e capacità di analisi approfondita delle situazioni considerate. Essi sono anche capaci di riflettere sulle proprie azioni e di esporre e comunicare le proprie interpretazioni e i propri ragionamenti.   |
| <b>4</b> | 545                        | OCSE: 31,6 %<br><br>Italia: 26,3 %  | Gli studenti che si collocano al 4° Livello sono in grado di servirsi in modo efficace di modelli dati applicandoli a situazioni concrete complesse anche tenendo conto di vincoli che richiedano di formulare assunzioni. Essi sono in grado, inoltre, di selezionare e di integrare fra loro rappresentazioni differenti, anche di tipo simbolico, e di metterle in relazione diretta con aspetti di vita reale. A questo livello, gli studenti sono anche capaci di utilizzare abilità ben sviluppate e di ragionare in maniera flessibile, con una certa capacità di scoperta, limitatamente ai contesti considerati. Essi riescono a formulare e comunicare spiegazioni e argomentazioni basandosi sulle proprie interpretazioni, argomentazioni e azioni.   |
| <b>3</b> | 482                        | OCSE: 56 %<br><br>Italia: 50,9 %  | Gli studenti che si collocano al 3° Livello sono in grado di eseguire procedure chiaramente definite, comprese quelle che richiedono decisioni in sequenza. Essi sono in grado, inoltre, di selezionare e applicare semplici strategie per la risoluzione dei problemi. A questo livello, gli studenti sono anche capaci di interpretare e di utilizzare rappresentazioni basate su informazioni provenienti da fonti differenti e di ragionare direttamente a partire da esse. Essi riescono a elaborare brevi comunicazioni per esporre le proprie interpretazioni, i propri risultati e i propri ragionamenti.   |
| <b>2</b> | 420                        | OCSE: 78 %<br><br>Italia: 75,1 %  | Gli studenti che si collocano al 2° Livello sono in grado di interpretare e riconoscere situazioni in contesti che richiedano non più di un'inferenza diretta. Essi sono in grado, inoltre, di trarre informazioni pertinenti da un'unica fonte e di utilizzare un'unica modalità di rappresentazione. A questo livello, gli studenti sono anche capaci di servirsi di elementari algoritmi, formule, procedimenti o convenzioni. Essi sono capaci di ragionamenti diretti e di un'interpretazione letterale dei risultati.   |
| <b>1</b> | 358                        | OCSE: 92 %<br><br>Italia: 90,9 %  | Gli studenti che si collocano al 1° Livello sono in grado di rispondere a domande che riguardano contesti loro familiari, nelle quali siano fornite tutte le informazioni pertinenti e sia chiaramente definito il quesito. Essi sono in grado, inoltre, di individuare informazioni e di mettere in atto procedimenti di routine all'interno di situazioni esplicitamente definite e seguendo precise indicazioni. Questi studenti sono anche capaci di compiere azioni ovvie che procedano direttamente dallo stimolo fornito.  |

Figura 2.1: I livelli di competenza in matematica

riguardano l'ambito dati e previsioni; alcuni di questi saranno oggetto di riflessione nel capitolo seguente in cui verranno analizzati e riesaminati alla luce di una breve sperimentazione in classe consistente nella somministrazione di un questionario. Un esempio di quesito difficile è **Risultati di una verifica**(domanda A8 nel questionario in appendice A): in una situazione "educativa", viene chiesto ai ragazzi di confrontare i risultati di una verifica di due gruppi A e B in un istogramma e di portare spiegazioni a sostegno del fatto che il gruppo A sia andato meglio rispetto al gruppo B. Si tratta di un quesito di livello 5 e la percentuale misera di risposte corrette è la metà rispetto alla media OCSE (16% contro il 32%); è alta anche la percentuale di omissioni (58% contro il 35%). Prime possibili giustificazioni dei risultati possono essere individuate nell'incapacità dei ragazzi di adoperare le conoscenze e abilità acquisite a scuola in situazioni concrete e nei curricoli disciplinari che tralasciano alcuni punti per concentrarsi su altri considerati più importanti: resta il fatto che l'apprendimento risulta essere un fenomeno molto complesso e incompleto se analizzato al di fuori del contesto.

In generale, però, l'Italia è in difetto nei livelli troppo alti di competenza e al contempo abbonda nei livelli più bassi, come mostrato in figura 2.2.

Rimandando le riflessioni di natura didattica più specifiche, risulta da questi dati la necessità di intervenire per uniformare le competenze fra aree geografiche e istituti diversi; inoltre è importante favorire il raggiungimento di livelli di apprendimento più elevati e l'obiettivo è fare in modo che i ragazzi sappiano utilizzare le competenze acquisite in classe nella vita di tutti i giorni.

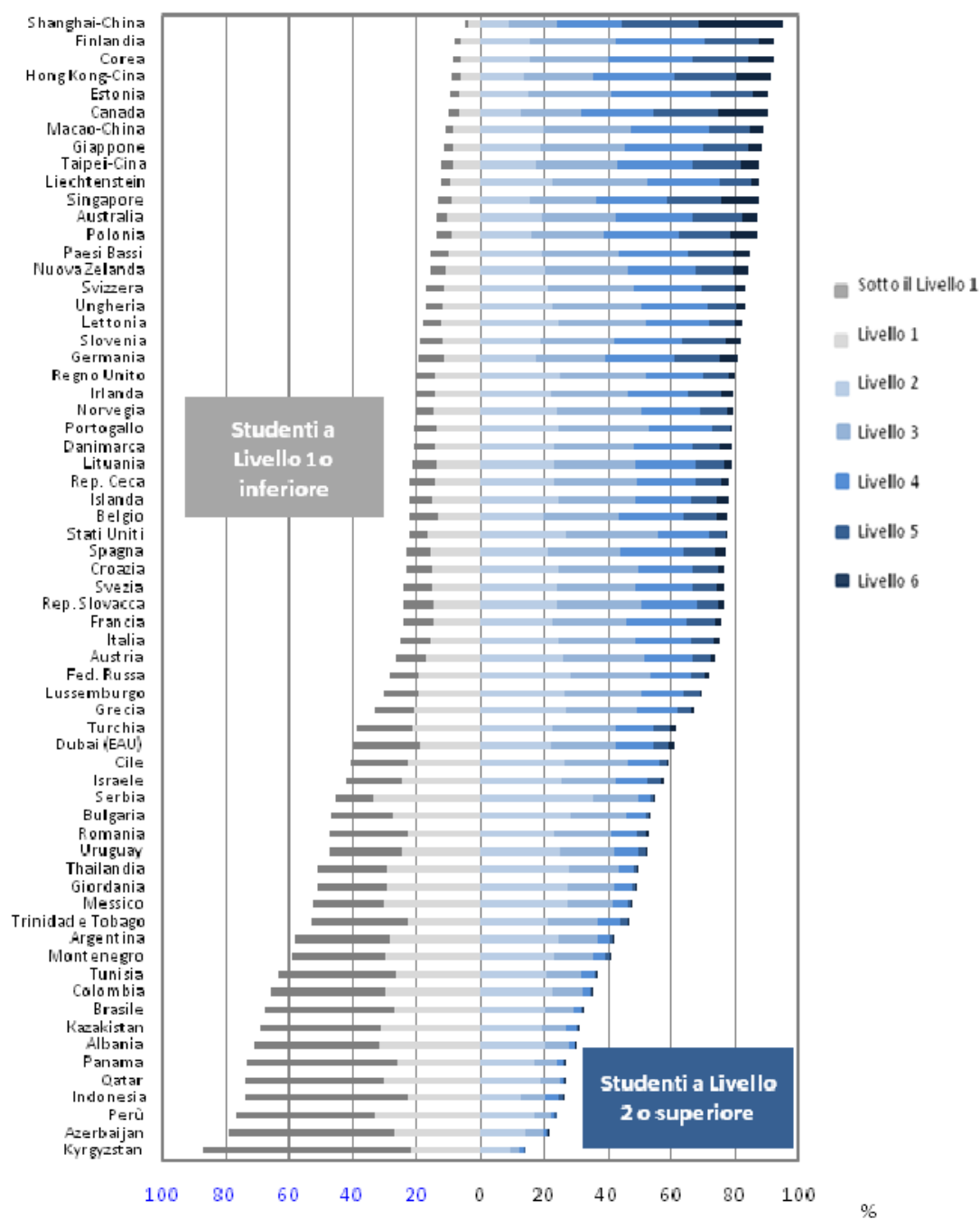


Figura 2.2: distribuzione dei ragazzi dei singoli paesi dell'OCSE rispetto al loro livello di competenza

## 2.2 Risultati della prova INVALSI 2011

La prova INVALSI 2011, a differenza di PISA, è di natura censuaria e si avvale di un campione controllato per redigere i risultati.

In un primo sguardo generale, possiamo notare come le domande che presuppongono la lettura di un grafico o di una tabella non siano risultate difficili e abbiano ottenuto buoni risultati. Per esempio le domande D1 e D12 (rispettivamente A1 e A3 in appendice A) hanno superato in alcuni item la percentuale dell'80% di risposte corrette. Più difficili sono risultate le domande che prevedevano calcoli, approssimazioni o la costruzione di piccoli modelli matematici: risultato disatteso data la concentrazione della prassi didattica su questi aspetti.

La suddivisione in ambiti delle domande del questionario mostra che, nell'ambito *dati e previsioni*, nonostante sia quello più carente di pratiche didattiche consolidate, si sono riscontrati i risultati migliori; mentre fra gli altri tre ambiti non c'è una differenza significativa. Il dato che colpisce maggiormente, e che conferma quanto riscontrato nelle valutazioni precedenti e in quelle internazionali, è la differenza fra istituti e aree geografiche diverse, anche se l'andamento dei risultati nei diversi ambiti non si diversifica se si scorporano i dati per area geografica o per tipologia di istituto (figura 2.3).

Nello specifico le cinque domande che riguardano l'ambito Dati e previsioni (D1, D2, D6, D12, D19) hanno ottenuto risultati molto positivi: tre di queste prevedevano la lettura e interpretazione di grafici o tabelle (D1, D6, D12), una prevedeva l'individuazione di una probabilità elementare (D2), l'ultima il calcolo di un valore medio (D19). Fra queste, prenderemo in esame le domande D1, D2, D12, D19 che possono essere consultate in appendice A e corrispondono rispettivamente ai quesiti A1, A4, A3, A2.

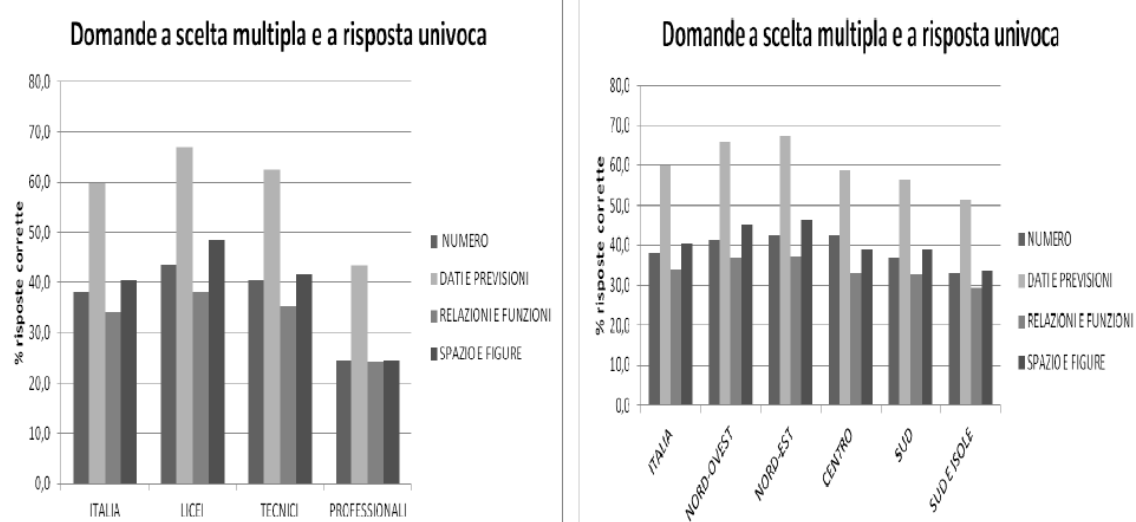


Figura 2.3: Suddivisione dei risultati per istituto e area geografica



## Capitolo 3

### La sperimentazione in classe

In questo capitolo verrà esposto un piccolo progetto sperimentale che permetterà di fare considerazioni didattiche sull'apprendimento della matematica dell'incertezza. Il progetto consiste nell'elaborazione di un questionario che è stato somministrato ad una classe seconda del liceo scientifico. Il limite del progetto è il campione molto ristretto che non permette di fare considerazioni generali: si è ovviato a questo fatto inserendo principalmente nel questionario domande raccolte nelle prove INVALSI e PISA delle quali abbiamo risultati su un campione molto vasto. Il punto di forza del progetto è, invece, la tipologia delle domande (prevalentemente a risposta aperta) che permetterà di evidenziare i ragionamenti, le strategie e gli errori dei ragazzi. Quindi, se da una parte il campione ristretto è un limite, dall'altra è un vantaggio perché consente di avvicinarsi di più al pensiero dei ragazzi e di capire meglio ciò che è stato evidenziato dalle prove di valutazione in campioni molto più ampi. Tant'è vero che in alcune domande delle prove accreditate è stata volutamente aggiunta una domanda aperta che richiedeva il ragionamento e le motivazioni della risposta.



### 3.1 Le domande preliminari

Il questionario (vedi appendice A) è composto da una serie di domande preliminari nelle quali vengono rilevate le idee degli studenti riguardo alle materie Probabilità e Statistica e gli argomenti affrontati nel loro percorso di studi: questa prima fase aiuta a comprendere l'atteggiamento con il quale i ragazzi si avvicinano alla materia e l'importanza che riveste lo studio della stessa. Si è cercato di riportare fedelmente le parole degli studenti per notare, fra l'altro, l'utilizzo di termini specifici e come vengono inseriti all'interno del discorso. Di seguito vengono riportate le domande della prima parte con le relative risposte più frequenti (le frasi riportate fedelmente dal questionario sono scritte in corsivo):

**1. Hai mai affrontato in classe argomenti di Probabilità e Statistica? Se sì, quali?**

In generale alcuni hanno affrontato alcuni argomenti di Probabilità e Statistica alle medie e altri alle superiori solo in preparazione alla prova INVALSI 2012. Gli argomenti accennati sono: la definizione classica di probabilità, la media, la frequenza, la moda, la mediana, i grafici per la raccolta dei dati.

**2. Che cos'è per te la Probabilità? A cosa serve?**

*La possibilità che ha un evento di accadere e serve per fare previsioni, la probabilità è un numero secondo cui un certo evento potrebbe verificarsi o meno, la Probabilità è il rapporto fra il numero di casi favorevoli e casi possibili, la percentuale con la quale un evento si verifica. Serve in economia e serve, ad esempio, per calcolare la probabilità di essere promossa o di trovare parcheggio. E' utile per comprendere quanto spesso una situazione può avvenire.*

**3. Che cos'è per te la Statistica? A cosa serve?**

*La statistica studia la percentuale di elementi che hanno un particolare requisito. Serve per dare dati indicativi. La statistica permette di*

*raggruppare determinate opinioni all'interno di un gruppo che poi ci sono note tramite percentuali. Serve per la rielaborazione o il confronto dei dati. E' l'osservazione di eventi per fare previsioni. Costruisce grafici che descrivono situazioni presenti e future. Fa sondaggi. E' la disciplina che rappresenta la probabilità. Calcola media, moda e mediana.*

4. **Perché, secondo te, la Probabilità e la Statistica vengono affrontate insieme o comunque in parallelo? Cosa hanno in comune?**

*Hanno in comune la percentuale. Sono entrambe in ambito matematico. Perché alcuni dati di probabilità possono essere usati per fare statistiche. Entrambe analizzano dati. Nelle statistiche si possono confrontare i valori della probabilità. Entrambe servono per fare previsioni con un margine d'errore. Entrambe descrivono situazioni future rispetto al passato attraverso strumenti matematici. Trattano della possibilità o impossibilità che un evento si verifichi.*

5. **Ci sono delle attività della vita di tutti i giorni in cui ritieni sia utile qualche conoscenza di Probabilità e Statistica? Se sì, quali?**

*Scommesse, schedina, giochi d'azzardo, carte, informazioni, elezioni, campo economico, direzione di aziende, ambito scientifico, calcolare la probabilità di essere promosso o che domani mi interroghi, calcolare gli sconti, per monitorare gli incidenti stradali, tutte le attività in cui è coinvolta la matematica, lancio del dado, alla mia età forse niente di particolare...*

### **Osservazioni**

I ragazzi non hanno mai affrontato per intero argomenti di probabilità e statistica nel biennio della scuola secondaria di secondo grado; le uniche conoscenze in materia provengono dalla secondaria di primo grado e dalla preparazione alla prova INVALSI di quest'anno. Quindi le risposte del ques-

tionario non potranno essere interpretate in termini di contenuti appresi o non appresi nel percorso di studi, ma solamente in termini di atteggiamenti, di idee e di ragionamenti che i ragazzi hanno in situazioni di incertezza.

Il fatto che gli studenti di una seconda del liceo scientifico non abbiano mai affrontato argomenti di probabilità e statistica è un dato che deve fare riflettere: nonostante siano argomenti presenti nei curricoli stilati dal ministero, ancora la pratica didattica non li considera o li relega in secondo piano rispetto ad altri argomenti. Inoltre, è un fenomeno diffuso in molte classi l'affrontare questi argomenti solo in preparazione alle prove di valutazione ufficiali come la prova INVALSI: paradossalmente hanno più successo le prove di valutazione che le indicazioni ministeriali nell'inserimento degli argomenti di matematica dell'incertezza nella pratica didattica.

Dalle risposte emergono nella maggioranza una idea positiva di probabilità come strumento di previsione e di statistica come raccolta e rielaborazione dei dati. Non è stato disatteso l'utilizzo di termini specifici senza cognizione di causa tra i quali evento, frequenza, moda, media e mediana: è nota a tutti l'importanza del linguaggio in matematica e quanto sia difficile trasmettere ai ragazzi un lessico adeguato chiarendo le interferenze inevitabili fra i significati in questo ambito e l'esperienza dei ragazzi. In molti riescono a comprendere lo stretto legame fra probabilità e statistica, anche se le risposte alla quarta domanda sono quelle meno chiare ed interpretabili. Uno dei punti di incontro fra le due materie citato in quasi un terzo dei protocolli è stranamente "la percentuale" e più della metà dei ragazzi cita, invece, la previsione di fatti futuri. La quinta domanda divide il campione in due gruppi, uno dei quali propone attività e situazioni, in cui è utile la matematica dell'incertezza, "vicine" come ad esempio la schedina o la probabilità di essere interrogato il giorno dopo, mentre l'altro situazioni o attività "lontane" come la direzione di aziende o la monitoraggio degli incidenti stradali: in generale è riconosciuta l'importanza di queste materie nel mondo del lavoro e in ambito scientifico

e solo in pochi le ritengono inutili.

| Quanto ti piace la matematica? | Per niente | Poco | Abbastanza | Molto |
|--------------------------------|------------|------|------------|-------|
| Tot. 22 studenti               | 1          | 6    | 13         | 2     |

Figura 3.1: Risultati della domanda iniziale

Nell'immagine sono riportati i risultati della domanda chiusa iniziale: incrociando le risposte a questa domanda con quelle alle domande aperte si può notare che chi ha scelto le opzioni “abbastanza” e “molto” sembra avere un atteggiamento più positivo nei confronti della probabilità e della statistica e si esprime in modo più consapevole e attento.

## 3.2 I risultati del questionario

### Considerazioni generali sui risultati: aspetti positivi e negativi

Il questionario è stato somministrato ad una classe di 22 alunni del liceo scientifico ai quali sono stati dati quaranta minuti per rispondere alle 12 domande e la possibilità di utilizzare la calcolatrice. Dalle informazioni raccolte e descritte nel paragrafo precedente, sappiamo che i ragazzi stanno assistendo ad alcune lezioni in preparazione alla prova INVALSI nelle quali si cerca di sopperire alle carenze nelle materie meno affrontate in classe, fra le quali la matematica dell'incertezza; quindi i ragazzi hanno già visionato domande simili a quelle presenti nel questionario e ciò ha facilitato la somministrazione. La durata del questionario è stata sufficiente affinché tutti i ragazzi siano stati in grado di rispondere alle domande, pochissime delle quali sono state lasciate in bianco. Nel complesso la prova è stata molto positiva e la percentuale di risposte corrette non è mai inferiore alla media nazionale, nelle domande che sono state estratte dalle prove di valutazione

ufficiali: nell'analisi di questo dato dobbiamo tenere presente che i licei hanno in generale ottenuto risultati migliori rispetto alla media nazionale in tutti gli ambiti. La figura 3.2 mostra la tabella con i risultati del questionario, per le domande è necessario confrontare l'appendice A.

| DOMANDA | ITEM                       | CORRETTE   | ERRATE                            | NON RISPOSTE      |
|---------|----------------------------|--|-----------------------------------|-------------------|
| A1      | a<br>b<br>c                | (19) 86,5%<br>(21) 95,5%<br>(22) 100%                                      | (3) 13,5%<br>(1) 4,5%             |                   |
| A2      |                            | (16) 72,7%   | (5) 22,8%                         | (1) 4,5%          |
| A3      | a<br>b<br>c<br>d<br>e<br>f | (22) 100%<br>(22) 100%<br>(16) 72,7%<br>(22) 100%<br>(19) 91%<br>(22) 100% | (6) 27,3%<br><br>(2) 9%           |                   |
| A4      | chiuso<br>aperto           | (18) 82%<br>(13) 59,2%   | (2) 9%<br>(5) 22,8%               | (2) 9%<br>(4) 18% |
| A5      | a<br>b                     | (19) 86,5%<br>(20) 91%   | (1) 4,5%                          | (2) 9%<br>(2) 9%  |
| A6      | chiuso<br>aperto           | (18) 82%<br>(18) 82%   | (4) 18%<br>(4) 18%                |                   |
| A7      | chiuso<br>aperto           | (21) 95,5%<br>(19) 86,5%   | (1) 4,5%                          | (3) 13,5%         |
| A8      |                            | (7) 31,8   | (8) 36,4                          | (7) 31,8%         |
| A9      |                            | (18) 82%   | (4) 18%                           |                   |
| A10     | a<br>b<br>c                | (19) 86,5%<br>(19) 86,5%<br>(18) 82%                                       | (3) 13,5%<br>(3) 13,5%<br>(4) 18% |                   |
| A11     |                            | (12) 54,5%   | (9) 41%                           | (1) 4,5%          |
| A12     | a<br>b                     | (17) 77%<br>(18) 82%   | (5) 23%<br>(1) 4,5%               | (3) 13,5%         |

Figura 3.2: Risultati delle domande

Fra gli aspetti positivi riscontrati, possiamo sicuramente citare la buona prestazione nelle domande in cui si richiedeva la lettura e la comprensione di grafici e tabelle (quesiti A1, A3, A5), anche se il dato è da ridimensionare

alla luce della domanda A8 che propone una situazione più complessa che ha creato non poche difficoltà sia nel campione ristretto che a livello nazionale. Inoltre, hanno ottenuto risultati positivi le domande in cui si richiede il calcolo di una probabilità elementare (A4) o di un semplice indice statistico (A2 e A7), risultato confortante visto l'imponente ingresso nelle indicazioni ministeriali dello studio di questi argomenti.

Fra gli aspetti negativi riscontrati, sicuramente un posto di primo piano viene occupato dal calo di percentuale di risposte corrette dalle domande chiuse a quelle aperte: la scelta di aggiungere domande aperte che richiedevano di motivare la risposta ha evidenziato la difficoltà degli studenti a spiegare il loro operato e ha messo in luce idee erronee nonostante le quali i soggetti fornivano ugualmente la risposta corretta. In più sembra emergere che il calcolo venga visto dagli studenti come semplice manipolazione simbolica, priva di significato; spesso le risposte si riducono a simboli (formule, equazioni, ecc...), senza una spiegazione. Questo porta a ritenere che i ragazzi concepiscano l'algebra non come uno strumento di pensiero, ma come fine a se stessa. Vi sono anche difficoltà più specifiche che sono state riscontrate nelle domande aggiunte a quelle estratte dalle prove ufficiali (le ultime quattro): ad esempio nell'individuazione di eventi indipendenti e nella comprensione dello spazio degli eventi.

### Il questionario domanda per domanda

Ora entriamo nel dettaglio, nell'analisi delle prime quattro domande, prese dalla prova INVALSI, e dei risultati ottenuti nel ristretto campione a cui è stato somministrato. Ogni domanda dell'ambito *dati e previsioni* (presente in appendice A) verrà corredata dai processi coinvolti in riferimento al quadro teorico delle prove SNV (Servizio Nazionale di Valutazione), dai risultati nazionali riportati in tabelle<sup>1</sup> e da un commento di carattere più didattico.

---

<sup>1</sup>La percentuale relativa alle risposte corrette viene riportata in grassetto in ogni tabella

**Domanda A1.**

Il processo prevalentemente coinvolto in questa domanda è: *utilizzare la matematica appresa per il trattamento quantitativo dell'informazione in ambito scientifico, tecnologico, economico e sociale (descrivere un fenomeno in termini quantitativi, interpretare una descrizione di un fenomeno in termini quantitativi con strumenti statistici o funzioni, utilizzare modelli matematici per descrivere e interpretare situazioni e fenomeni, ...).*

Gli ottimi risultati delle risposte alla domanda A1 rispecchiano perfettamente i risultati nazionali:

| ITEM | VERO         | FALSO        | NON RISPOSTE |
|------|--------------|--------------|--------------|
| A1_a | 10,7%        | <b>88,5%</b> | 0,8%         |
| A1_b | <b>74,9%</b> | 21,4%        | 3,7%         |
| A1_c | <b>86,7%</b> | 11,2%        | 2,1%         |

Figura 3.3: I risultati nazionali relativi alla domanda A1

La risposta alla domanda richiede le capacità di saper leggere ed interpretare una tabella; inoltre è necessario svolgere alcune semplici operazioni che possono essere ovviate con opportune approssimazioni. Tutti i ragazzi hanno risposto alla domanda e ci sono state solo quattro risposte errate: tre al primo item, una al secondo e zero al terzo. I risultati confermano le buone capacità di lettura ed elaborazione dei dati di una tabella, argomento principalmente sviluppato nella scuola secondaria di secondo grado che risulta essere consolidato anche al termine dell'obbligo di istruzione. Il concesso utilizzo della calcolatrice ha messo in luce un altro aspetto importante: in pochissimi si sono affidati alla approssimazione dei risultati e la maggior parte ha preferito sfruttare la macchina calcolatrice. Questo è indice di una scarsa attenzione, nella prassi didattica, all'esercizio di approssimazione e di

stima, concetti fondamentali nella risoluzione di problemi, perché permettono di verificare subito la bontà dei risultati e di snellire i calcoli, ove non richiesti, evitando errori di procedimento. Del resto nei libri di testo raramente vengono proposti esercizi con l'obiettivo di fare una stima o con la richiesta di interpretare i dati in maniera approssimativa.

### Domanda A2.

Il processo prevalentemente coinvolto in questa domanda è: *conoscere e padroneggiare algoritmi e procedure (in ambito aritmetico, geometrico...)*.

I risultati, in linea generale, confermano quelli nazionali, la maggioranza propende per la risposta corretta anche se vi è una diversa distribuzione tra i distrattori:

| ITEM | A     | B     | C            | D    | NON RISPOSTE |
|------|-------|-------|--------------|------|--------------|
| A2   | 14,7% | 14,5% | <b>59,4%</b> | 8,8% | 2,6%         |

Figura 3.4: I risultati nazionali relativi alla domanda A2

Il ragazzo deve saper calcolare la media di una grandezza continua di cui è nota la distribuzione di frequenza di classi di uguale ampiezza: non è una richiesta usuale e nonostante ciò la maggioranza fornisce la risposta corretta. La domanda è fornita di tre distrattori molto fuorvianti che sono stati scelti in maniera più o meno uniforme nel campione nazionale, ma non nel campione ristretto del questionario. Infatti nella classe un ragazzo solo ha optato per la risposta A, nessuno per la B e ben quattro per la D: siamo portati a ritenere che gli studenti abbiano escluso le prime due poiché non prendevano in considerazione le frequenze, indice di una disinvoltura inaspettata nei confronti di una distribuzione di frequenza. I buoni risultati della domanda A2 dimostrano che lo studio degli indici statistici, che sempre più sta prendendo piede in Italia, ha portato gli alunni a sapersi muovere meglio in contesti di



raccoglimento ed elaborazione dei dati.

### Domanda A3.

Il processo prevalentemente coinvolto in questa domanda è: *utilizzare la matematica appresa per il trattamento quantitativo dell'informazione in ambito scientifico, tecnologico, economico e sociale (descrivere un fenomeno in termini quantitativi, interpretare una descrizione di un fenomeno in termini quantitativi con strumenti statistici o funzioni, utilizzare modelli matematici per descrivere e interpretare situazioni e fenomeni, ...).*

Nel complesso i risultati del campione ristretto sono stati largamente più positivi rispetto a quelli del campione nazionale (è la domanda che ha ottenuto i punteggi migliori, con quattro item a cui tutti i ragazzi rispondono correttamente), anche se l'andamento è simile se notiamo i due item su cui i ragazzi hanno incontrato più difficoltà:

| ITEM | VERO         | FALSO        | NON SI RICAVALA | NON RISPOSTE |
|------|--------------|--------------|-----------------|--------------|
| A3_a | 7,5%         | 4,6%         | <b>85,3%</b>    | 2,6%         |
| A3-b | <b>81,5%</b> | 15,8%        | 0,9%            | 1,8%         |
| A3_c | 36,6%        | <b>59,6%</b> | 1,8%            | 2,1%         |
| A3_d | 12,2%        | <b>76,1%</b> | 8,6%            | 3,1%         |
| A3_e | 39,8%        | 13,7%        | <b>43,9%</b>    | 2,7%         |
| A3_f | 7,7%         | <b>82,4%</b> | 7,5%            | 2,4%         |

Figura 3.5: I risultati nazionali relativi alla domanda A3

Nel quesito si richiede la comprensione di un grafico; non vi sono operazioni da svolgere e si pone l'attenzione sulla capacità del ragazzo di ricavare informazioni. I fattori che complicano la domanda sono la presenza di un grafico molto ricco di informazioni sovrapposte e l'utilizzo di termini che potrebbero creare confusione. I ragazzi rispondono brillantemente alle richieste, il che denota le buone capacità di lettura e comprensione di un grafico

(oltre che di una tabella, vedi domanda A1), argomento affrontato a tutti i livelli scolastici e consolidato al termine della secondaria di primo grado e al biennio della secondaria di secondo grado. Degne di nota sono i due item che ricevono il minor numero di risposte corrette A3(c) e A3 (e): nel primo i ragazzi possono essere stati fuorviati dall'espressione "il più alto valore nella media delle temperature minime" e nel secondo hanno erroneamente attribuito all'anno con la media delle temperature minima la giornata più fredda. Dunque, l'unico neo è stata la confusione prodotta da termini non interpretati correttamente.

#### Domanda A4.

Il processo prevalentemente coinvolto in questa domanda è: *utilizzare la matematica appresa per il trattamento quantitativo dell'informazione in ambito scientifico, tecnologico, economico e sociale (descrivere un fenomeno in termini quantitativi, interpretare una descrizione di un fenomeno in termini quantitativi con strumenti statistici o funzioni, utilizzare modelli matematici per descrivere e interpretare situazioni e fenomeni, ...).*

Le risposte corrette nel campione ristretto sono, in proporzione, maggiori rispetto a quelle riscontrate nel campione nazionale:

| ITEM | A     | B     | C     | D            | NON RISPOSTE |
|------|-------|-------|-------|--------------|--------------|
| A4   | 16,1% | 11,9% | 25,5% | <b>44,8%</b> | 1,7%         |

Figura 3.6: I risultati nazionali relativi alla domanda A4

La domanda richiedeva il calcolo di una probabilità descrivendo una scena della vita di tutti i giorni e la percentuale di risposte corrette è soddisfacente. I distrattori sono stati scelti fra i numeri presenti nel testo e non hanno presentato troppe insidie, indice di una buona attenzione da parte degli studenti al testo. Nel questionario è stata aggiunta una domanda aperta nella quale

veniva richiesto il procedimento col quale si era giunti alla risposta: sebbene la maggioranza abbia risposto correttamente anche a questo item, e significativo il calo della percentuale rispetto a chi ha risposto bene alla domanda chiusa. Infatti due ragazzi rispondono in maniera errata e due non rispondono alla domanda chiusa, mentre cinque rispondono in maniera errata e quattro non rispondono alla domanda aperta. Nelle risposte aperte in molti descrivono il ragionamento a parole supportando la spiegazione con i dati in percentuale, altri si limitano a scrivere una operazione come in figura 3.7: ancora una volta si ripresenta la reticenza dei ragazzi di fronte a una domanda aperta nella quale viene semplicemente chiesto di motivare la risposta.

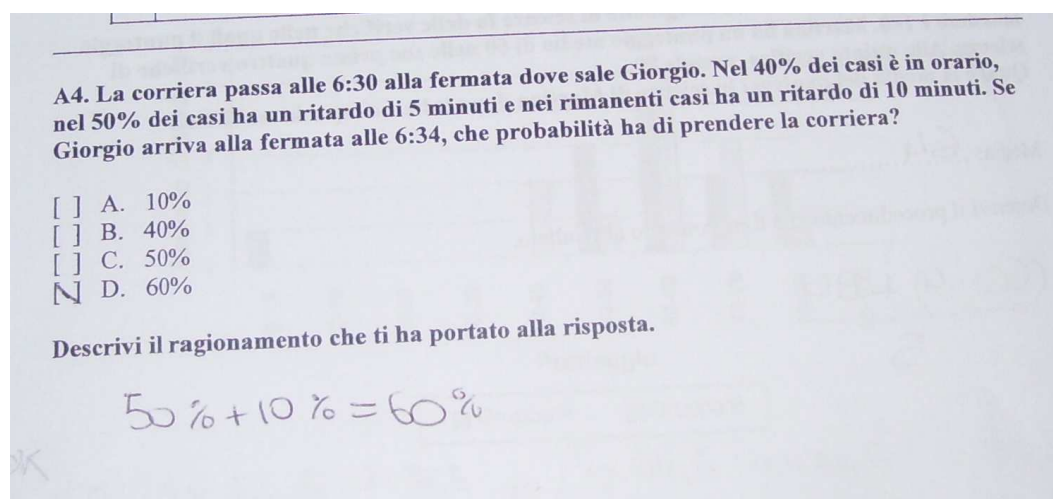


Figura 3.7: Protocollo 1

Nel complesso è confortante sapere che i ragazzi non si trovano troppo spaesati di fronte al calcolo di probabilità elementari, però preoccupa la scarsa capacità di descrivere i propri ragionamenti: infatti un atteggiamento metacognitivo nei confronti del proprio operato è favorevole all'apprendimento della matematica come dimostrano numerosi studi di psicologia dell'educazione.

Procediamo, ora, con l'analisi delle domande prese dalla prova internazionale OCSE-PISA. Per ciascuna domanda dell'ambito *incertezza e dati*, presente in appendice, viene chiarito il livello di difficoltà in linea con il quadro di riferimento<sup>2</sup> della prova internazionale e vengono proposti una tabella con i risultati nazionali e un commento.

### Domanda A5.

La domanda è composta da due item, il primo dei quali (Livello 2 sulla scala complessiva di literacy in matematica) ha ottenuto risposte in linea con i risultati dei licei scientifici, comunque migliori rispetto alla media nazionale:

#### M438Q01- Esportazioni

|               | <i>Risposta 0</i> | <b><i>Risposta 1</i></b> | <i>Non valide</i> | <i>Omesse</i> | <i>Non raggiunte</i> |
|---------------|-------------------|--------------------------|-------------------|---------------|----------------------|
| <b>Area</b>   | %                 | %                        | %                 | %             | %                    |
| Nord Ovest    | 12,0              | <b>75,8</b>              | 0,0               | 9,5           | 2,7                  |
| Nord Est      | 13,1              | <b>76,2</b>              | 0,0               | 7,7           | 3,0                  |
| Centro        | 9,0               | <b>66,4</b>              | 0,0               | 20,7          | 3,9                  |
| Sud           | 11,5              | <b>56,5</b>              | 0,0               | 23,4          | 8,7                  |
| Sud Isole     | 17,9              | <b>49,8</b>              | 0,0               | 25,3          | 7,0                  |
| <b>ITALIA</b> | 12,7              | <b>64,1</b>              | 0,0               | 17,9          | 5,3                  |
| <b>OCSE</b>   | 13,4              | <b>76,5</b>              | 0,0               | 7,3           | 2,8                  |

Figura 3.8: I risultati nazionali relativi alla domanda A5, primo item

Il secondo item (Livello 4 sulla scala complessiva di literacy in matematica) ha ottenuto un risultato nettamente migliore rispetto alla media nazionale (91% di risposte corrette contro il 48,8%, percentuale media di risposte corrette dell'area in cui è stato somministrato il questionario):

<sup>2</sup>Si confronti la tabella in figura 2.1

M438Q02- Esportazioni

|               | Risposta 1 | Risposta 2 | Risposta 3 | Risposta 4 | <b>Risposta 5</b> | Non valide | Omesse | Non raggiunte |
|---------------|------------|------------|------------|------------|-------------------|------------|--------|---------------|
| <b>Area</b>   | %          | %          | %          | %          | %                 | %          | %      | %             |
| Nord Ovest    | 9,4        | 8,8        | 17,9       | 8,7        | <b>43,6</b>       | 0,1        | 8,4    | 3,1           |
| Nord Est      | 7,6        | 11,1       | 14,7       | 5,4        | <b>48,8</b>       | 0,0        | 9,2    | 3,2           |
| Centro        | 7,9        | 10,8       | 17,5       | 8,0        | <b>33,6</b>       | 0,1        | 17,7   | 4,3           |
| Sud           | 14,2       | 9,6        | 8,9        | 8,6        | <b>30,9</b>       | 0,0        | 19,0   | 8,7           |
| Sud Isole     | 6,9        | 7,7        | 17,2       | 8,2        | <b>31,7</b>       | 1,0        | 20,1   | 7,3           |
| <b>ITALIA</b> | 9,5        | 9,5        | 15,1       | 8,0        | <b>37,1</b>       | 0,2        | 15,2   | 5,5           |
| <b>OCSE</b>   | 10,2       | 9,9        | 15,8       | 7,6        | <b>46,9</b>       | 0,0        | 6,7    | 3,0           |

Figura 3.9: I risultati nazionali relativi alla domanda A5, secondo item

La domanda richiedeva la lettura e l'elaborazione dei dati di due grafici di natura diversa (un istogramma e un aerogramma): il primo item prevedeva solamente la lettura dell'istogramma, mentre la seconda richiedeva la lettura incrociata dei due grafici e un calcolo percentuale. I risultati del primo item avvalorano la tesi che i ragazzi siano in grado di leggere e interpretare le raccolte di dati in grafici e tabelle e abbiano consolidato queste competenze. I risultati insoddisfacenti, a livello nazionale, nel secondo item evidenziano la difficoltà degli studenti italiani di fronte a domande con alto livello di difficoltà: se da una parte la maggioranza riesce a rispondere correttamente a domande in cui vengono richieste competenze di base (come il primo item), solo in pochi riescono a rispondere a domande che richiedono competenze più elevate. Nella classe esaminata, d'altra parte, riescono ottimamente a reperire dai due grafici le informazioni necessarie per rispondere al secondo item, sintomo di un alto livello di competenze in questo ambito.

### Domanda A6.

La domanda A6 (Livello 4 sulla scala complessiva di literacy in matematica) ha ottenuto i risultati aspettati, in linea con quelli dei licei scientifici e superiori alla media nazionale:

*M467Q01 - Caramelle colorate*

|               | <i>Risposta 1</i> | <b><i>Risposta 2</i></b> | <i>Risposta 3</i> | <i>Risposta 4</i> | <i>Non valide</i> | <i>Omesse</i> | <i>Non raggiunte</i> |
|---------------|-------------------|--------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|---------------|----------------------|
| <b>Area</b>   | %                 | %                        | %                 | %                 | %                 | %             | %                    |
| Nord Ovest    | 7,9               | <b>41,9</b>              | 25,8              | 22,2              | 0,4               | 1,3           | 0,5                  |
| Nord Est      | 9,2               | <b>44,1</b>              | 25,3              | 18,0              | 0,1               | 2,0           | 1,3                  |
| Centro        | 9,2               | <b>35,4</b>              | 22,8              | 27,9              | 0,1               | 4,3           | 0,3                  |
| Sud           | 8,6               | <b>23,9</b>              | 27,9              | 34,4              | 0,3               | 3,5           | 1,3                  |
| Sud Isole     | 9,0               | <b>27,1</b>              | 25,6              | 31,2              | 0,7               | 4,0           | 2,3                  |
| <b>ITALIA</b> | 8,7               | <b>33,7</b>              | 25,6              | 27,4              | 0,3               | 3,1           | 1,1                  |
| <b>OCSE</b>   | 9,1               | <b>49,7</b>              | 20,9              | 17,4              | 0,0               | 1,8           | 1,0                  |

Figura 3.10: I risultati nazionali relativi alla domanda A6

Nel quesito si richiedeva una media fra due valori con frequenze diverse in una situazione concreta. E' confortante sapere che il risultato italiano è superiore alla media OCSE in una domanda di livello quattro: significa che i ragazzi hanno buone capacità nel calcolo di indici statistici come la media. Dobbiamo precisare che la domanda si riferisce ad una situazione molto vicina ai ragazzi italiani e che invece potrebbe essere inusuale in altre parti del mondo dove le valutazioni vengono fatte in maniera differente. Possiamo avere una prova di questo, nel campione ristretto, con l'esame delle risposte aperte che sono state aggiunte all'item: nel protocollo 18 (così come nel 22) un ragazzo calcola la media esattamente come se fossero i suoi voti e alla fine scrive 6,4 al posto di 64 (vedi figura 3.11).

Inoltre, è interessante notare come la domanda A6 sia l'unico caso del questionario in cui le risposte corrette vanno di pari passo con le descrizioni dei ragionamenti: tutti quelli che rispondono esattamente all'item riescono a motivare correttamente il loro ragionamento.

**A7. Nella scuola di Martina, l'insegnante di scienze fa delle verifiche nelle quali il punteggio massimo è 100. Martina ha un punteggio medio di 60 nelle sue prime quattro verifiche di scienze. Alla quinta verifica, prende 80. Qual è la media dei punteggi in scienze di Martina dopo tutte e cinque le verifiche?**

Media: ..... 6,4 .....

Descrivi il procedimento che ti ha condotto al risultato.

$$\frac{6+6+6+6+8}{4}$$

Figura 3.11: Protocollo 18

**Domanda A7.**

Il quesito A7 (Livello 4 sulla scala complessiva di literacy in matematica) ha ottenuto risultati molto positivi, di molto superiori rispetto alla media nazionale:

**M468Q01T - Verifica di scienze**

|               | Risposta 0 | Risposta1   | Non valide | Omesse | Non raggiunte |
|---------------|------------|-------------|------------|--------|---------------|
| Area          | %          | %           | %          | %      | %             |
| Nord Ovest    | 25,9       | <b>62,2</b> | 2,8        | 5,2    | 3,9           |
| Nord Est      | 31,0       | <b>55,7</b> | 4,1        | 4,9    | 4,4           |
| Centro        | 34,2       | <b>50,4</b> | 5,5        | 4,0    | 5,9           |
| Sud           | 36,9       | <b>34,2</b> | 8,3        | 10,2   | 10,4          |
| Sud Isole     | 34,3       | <b>39,0</b> | 6,1        | 10,7   | 9,8           |
| <b>ITALIA</b> | 32,6       | <b>47,5</b> | 5,5        | 7,3    | 7,1           |
| <b>OCSE</b>   | 35,1       | <b>44,7</b> | 0,0        | 15,8   | 4,4           |

Figura 3.12: I risultati nazionali relativi alla domanda A7

La domanda richiedeva il calcolo di una percentuale estrapolando i dati

da un grafico. La media italiana delle risposte corrette è significativamente inferiore alla media OCSE, sebbene vi siano grandi differenze fra aree geografiche diverse. Confrontando la domanda A4 con la A7, possiamo notare come in entrambe la richiesta sia la stessa (il calcolo di una probabilità), ma i risultati a livello nazionale siano profondamente diversi: la differenza sta nella complessità della situazione che nella prima è più lieve. Quindi, se da una parte i ragazzi dimostrano di possedere le capacità di base nel calcolo delle probabilità, dall'altra non riescono a gestire situazioni più complesse. Questo fatto è supportato dall'esame delle risposte aperte che sono state aggiunte nel campione ristretto: sebbene quasi tutti sappiano rispondere correttamente alla domanda, la metà riesce a motivare correttamente il ragionamento che li ha condotti al risultato, molti dei quali si limitano a scrivere una proporzione come nel protocollo 1 (vedi figura 3.13).

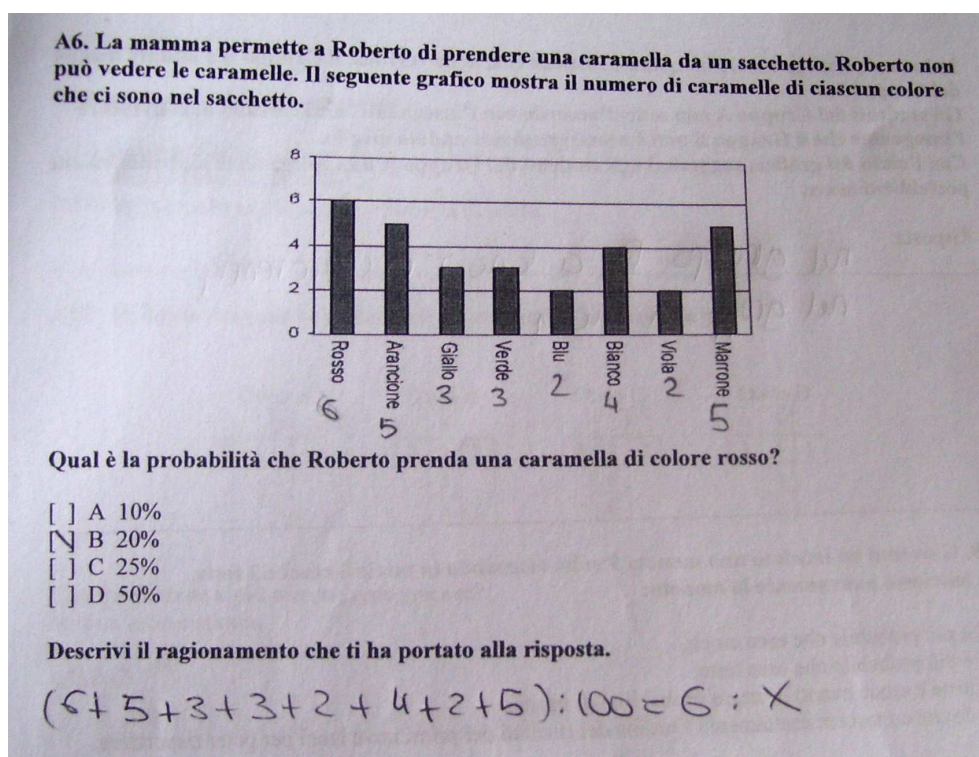


Figura 3.13: Protocollo 17



**Domanda A8.**

La domanda A8 (Livello 5 sulla scala complessiva di literacy in matematica), ha ottenuto risultati in linea con quelli dei licei scientifici e con la media OCSE, di molto superiori alla media nazionale:

**M513Q1 - Risultati di una verifica**

|               | <i>Risposta 0</i> | <b><i>Risposta 1</i></b> | <i>Non valide</i> | <i>Omesse</i> | <i>Non raggiunte</i> |
|---------------|-------------------|--------------------------|-------------------|---------------|----------------------|
| <b>Area</b>   | %                 | %                        | %                 | %             | %                    |
| Nord Ovest    | 24,9              | <b>28,3</b>              | 0,0               | 44,0          | 2,7                  |
| Nord Est      | 28,6              | <b>23,5</b>              | 0,0               | 45,3          | 2,6                  |
| Centro        | 30,6              | <b>14,7</b>              | 0,0               | 50,8          | 3,8                  |
| Sud           | 22,8              | <b>8,8</b>               | 0,0               | 60,2          | 8,2                  |
| Sud Isole     | 19,5              | <b>4,3</b>               | 0,0               | 69,4          | 6,8                  |
| <b>ITALIA</b> | 24,9              | <b>15,3</b>              | 0,0               | 54,7          | 5,1                  |
| <b>OCSE</b>   | 31,9              | <b>31,3</b>              | 34,0              |               | 2,7                  |

Figura 3.14: I risultati nazionali relativi alla domanda A8

Il quesito richiede una complessa interpretazione di un grafico: siamo in presenza di uno dei quesiti che è risultato più difficile fra gli studenti a livello nazionale, ma anche nel campione ristretto. Dai commenti dei ragazzi, che sono stati raccolti dopo il questionario, si evince in generale lo spaesamento di fronte ad una domanda che richiede una soluzione matematica, ma “non è riconducibile a nessuna formula o problema studiato”: in pratica la maggior parte degli studenti non ritiene matematica una spiegazione a parole che non contenga simboli, formule o equazioni. Questo fatto può essere attribuito alla prassi didattica che propone principalmente esercizi in cui sono richiesti i contenuti matematici appena studiati e alla credenza erronea diffusa che in matematica sia necessario esprimersi solamente in linguaggio simbolico. La situazione reale ha aiutato coloro che hanno risposto correttamente al quesito.

to che, ad eccezione di un ragazzo, hanno proposto la tesi che nel gruppo A ci siano state meno insufficienze. L'unico ragazzo che propone una risposta corretta diversa (protocollo 13, in figura 3.15), considera la distribuzione dei punteggi, indice di una alta competenza nella lettura di un grafico. E' altissima la percentuale dei ragazzi che non risponde sia a livello nazionale che nella classe esaminata: questo dato ridimensiona l'idea che i ragazzi si trovino a proprio agio di fronte a grafici e tabelle (vedi domande A1, A4 e A7), facendo dipendere la disinvoltura dei ragazzi dalla complessità del quesito. Resta il fatto che se in molti riescono a rispondere a quesiti "facili", troppo pochi riescono a rispondere ai quesiti "difficili".

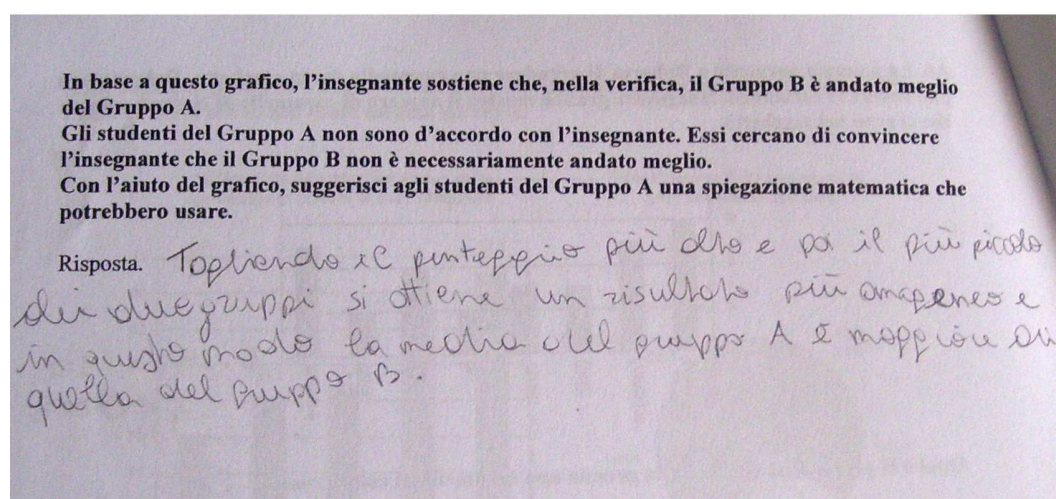


Figura 3.15: Protocollo 13

Infine prendiamo in considerazione le ultime quattro domande elaborate per sondare alcuni aspetti legati alla probabilità.

### **Domande A9 e A10.**

Le domande A9 e A10 hanno come obiettivo quello di cogliere l'idea che i ragazzi hanno nei confronti delle prove indipendenti di eventi equiprobabili, uno dei primi esempi che si incontra nello studio della probabilità. In particolare si è sfruttata la situazione del lancio ripetuto di una moneta, citata da tutti i libri di testo e sulla quale sono stati costruiti numerosi percorsi didattici riguardanti i primi approcci alla probabilità. In generale i risultati sono stati ottimi (l'inesperienza in questo campo mi ha portato ad elaborare domande troppo facili, e quindi poco significative!) perché i ragazzi hanno recentemente affrontato in classe la situazione, però alcune risposte aperte alla domanda A9 portano a galla dei ragionamenti molto diffusi tra i ragazzi che è importante analizzare. Nell'immagine relativa al protocollo 5 (figura 3.16) possiamo notare come il ragazzo, convinto dalle lezioni riguardanti il lancio della moneta, inizialmente opti per la risposta corretta per poi cedere alla sua esperienza personale che lo fa propendere per la scelta sbagliata. Sarebbe interessante ripetere al ragazzo la stessa domanda in un compito in classe per capire se, in un contesto di contratto didattico, il ragazzo avrebbe rinnegato il suo modello erroneo per il modello proposto dal professore, ma evidentemente non del tutto accettato.

Le poche altre risposte sbagliate sono dovute al non riconoscimento dell'indipendenza dei lanci, infatti in alcuni protocolli (fra cui il 21 in figura 3.17) viene giustificata la risposta dicendo che è importante conoscere l'ordine dei precedenti lanci per fare una previsione corretta.

A9. Giovanni ha lanciato una moneta 9 volte ottenendo in totale 6 croci e 3 teste.  
Se lanciasse nuovamente la moneta:

☐ è più probabile che esca croce.  
☒ è più probabile che esca testa. *← corretta*  
☒ testa e croce hanno la stessa probabilità di uscita.  
☐ dovrei conoscere esattamente l'ordine dei risultati dei primi nove lanci per poter rispondere.

Motiva la tua risposta.

*Ogni lancio è fine a se stesso quindi la probabilità che esca testa o croce è sempre 1 o 50% anche se logicamente è più facile che esca testa 2*

Figura 3.16: Protocollo 5

A9. Giovanni ha lanciato una moneta 9 volte ottenendo in totale 6 croci e 3 teste.  
Se lanciasse nuovamente la moneta:

☐ è più probabile che esca croce.  
☐ è più probabile che esca testa.  
☐ testa e croce hanno la stessa probabilità di uscita.  
☒ dovrei conoscere esattamente l'ordine dei risultati dei primi nove lanci per poter rispondere.

Motiva la tua risposta.

*Dovrei conoscere i precedenti risultati per stabilire una frequenza*

Figura 3.17: Protocollo 21

Questa motivazione porta ad una riflessione su idee erranee dei ragazzi che fanno riferimento al cosiddetto “numero pigro”, cioè sapere che un evento non si verifica su molte ripetizioni aumenta la probabilità che si verifichi, il che non è vero in un contesto di prove ripetute indipendenti. Queste domande hanno evidenziato che il concetto di prove indipendenti incontra idee e modelli dovuti alla esperienza dei ragazzi che ostacolano un corretto apprendimento, è quindi necessario porre molta attenzione a questi aspetti nella progettazione didattica.

**Domanda A11.**

Il quesito A11 propone la situazione classica del lancio del dado e in particolare viene chiesto di scegliere lo sviluppo del dado migliore per ottenere il risultato più alto sommando i punteggi di cento lanci consecutivi. La maggioranza risponde correttamente alla domanda scegliendo lo sviluppo che presenta la media dei punteggi più alta, ma è significativamente alta la percentuale di chi risponde in maniera scorretta. Questo gruppo può essere suddiviso in due categorie, “gli ottimisti” (protocollo 11 in figura 3.18) che propendono per la risposta A perché presenta ben quattro punteggi superiori al tre che viene considerato la media e i “pessimisti” (protocollo 15 in figura 3.19) che scelgono la risposta B perché non presenta nessun punteggio inferiore alla media.

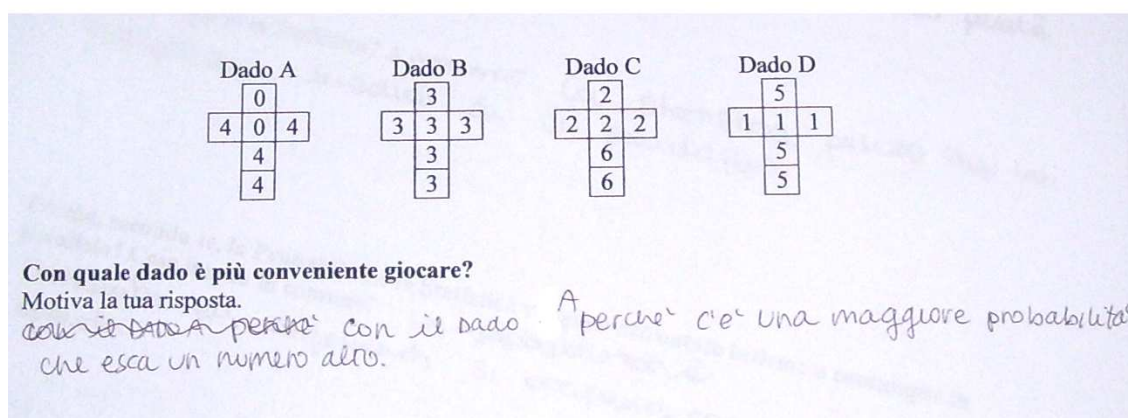


Figura 3.18: Protocollo 11

In entrambi i casi i ragazzi non riconoscono che l'indice che li aiuta nella decisione è la media tra i punteggi di ogni singolo sviluppo, poiché si tratta di un lancio ripetuto tante volte. Questa domanda suggerisce come sia importante capire se un indice statistico è significativo in una situazione, poiché i ragazzi sono portati dall'esperienza a fare la media (indice statistico molto

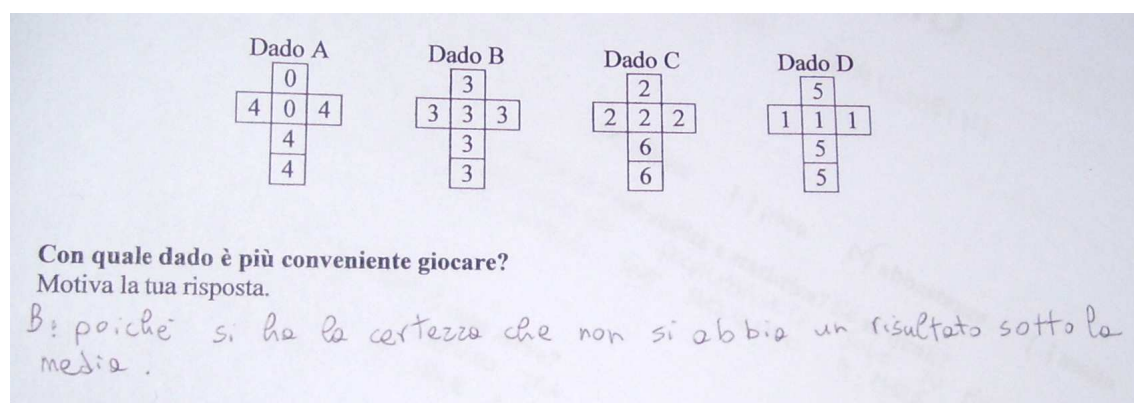


Figura 3.19: Protocollo 15

intuitivo) anche quando non è utile o in maniera errata.

#### Domanda A12.

Nell'ultima domanda, composta da due item si sono indagate le idee intuitive dei ragazzi nei confronti dello spazio degli eventi proponendo la situazione classica dell'estrazione di una carta da un mazzo di 52 carte da gioco. In generale, anche in questo caso le risposte sono state molto soddisfacenti, poiché la maggior parte dei ragazzi risponde in maniera corretta. Però è interessante osservare come ci siano difficoltà da parte dei ragazzi nel distinguere gli eventi: per esempio, nel primo item, gli esiti che sono in comune ai due eventi (le figure di cuori) vengono attribuiti o all'uno o all'altro senza motivo come mostrato nel protocollo 11 in figura 3.20.

Inoltre dalle risposte dei ragazzi si ha l'impressione che non sia chiaro il significato del connettivo "o", da qui l'esigenza di una progettazione didattica che preveda una attenzione speciale alla traduzione dei connettivi logici in operazioni insiemistiche fra gli eventi.



A12. Consideriamo un mazzo di 52 carte classico come quello esposto in figura.

È più probabile pescare una carta di cuori o una figura? Perché?

*E' più probabile pescare una carta di cuori perché nel mazzo ce ne sono 13, mentre di figure 10.*

*E' più probabile pescare una carta di cuori, perché ce ne sono 13, mentre di figure 9.*

Giovanni e Carlo si sfidano: Giovanni vince se esce o una carta di cuori o una figura, Carlo vince altrimenti. Su chi scommetteresti e perché?

Figura 3.20: Protocollo 11

# Conclusioni

Il dato più interessante che si evince nella tesi è la certezza che i ragazzi siano pronti nella scuola secondaria di primo e secondo grado ad affrontare argomenti di probabilità e statistica. Il dato è supportato dai risultati delle prove di valutazione nazionali e internazionali che forniscono buoni risultati in questo ambito (in generale migliori rispetto alle altre aree del sapere matematico), anche se la prassi didattica è più concentrata e sviluppata negli altri ambiti.

Il dato più sconcertante è la rilevazione di una enorme distanza fra i curricoli ministeriali e la prassi didattica relativi all'ambito della matematica dell'incertezza; infatti, anche se la probabilità e la statistica rivestono una grande importanza nelle indicazioni ministeriali, in realtà non trovano il giusto spazio all'interno della pratica scolastica. Addirittura nella classe esaminata è emerso che non sono mai stati affrontati argomenti di probabilità e statistica, se non in preparazione alla somministrazione della prova INVALSI del maggio 2012. Paradossalmente, nell'ingresso e nello sviluppo di queste materie nella prassi didattica agiscono di più le prove di valutazione che i curricoli redatti dal ministero. Questa conclusione apre la strada a numerose riflessioni che riguardano i motivi per i quali la matematica dell'incertezza non viene affrontata in classe e sia così poco sviluppata la pratica didattica in questo ambito.

La tesi offre, da questo punto di vista, delle informazioni utili per chi



ha intenzione di sviluppare il tema della trasposizione didattica nell'ambito della matematica dell'incertezza, poiché evidenzia alcuni punti di forza dei ragazzi nell'apprendimento della stessa e allo stesso tempo individua alcune idee che possono essere di ostacolo.

Spero che il mio lavoro, da un lato concentri l'attenzione sulla differenza fra i contenuti delle indicazioni ministeriali e i contenuti che realmente vengono affrontati in classe nell'ambito della probabilità e statistica, dall'altro possa essere utile allo sviluppo di metodi e strategie per l'insegnamento della matematica dell'incertezza, area del sapere matematico che oggi riveste una grandissima importanza in ambito scientifico.

# Bibliografia

- [1] IEA (2008). TIMSS 2007, *Assessment Frameworks*. TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.
- [2] IEA (2008). TIMSS 2007, *Technical Report*. TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.
- [3] INVALSI (2008). TIMSS 2007. *Prime valutazioni sugli apprendimenti degli studenti italiani*.
- [4] INVALSI (2009). *Le competenze in lettura, matematica e scienze degli studenti quindicenni italiani. Rapporto nazionale PISA 2009*.
- [5] OECD (2006). PISA 2006, *Technical Report*.
- [6] OECD (2009). PISA 2009, *Assessment Frameworks. Key competencies in reading, mathematics and science*.
- [7] INVALSI (2003). PISA 2003, *Rapporto nazionale OCSE-PISA 2003. Il livello dei quindicenni italiani in matematica, lettura, scienze e problem solving*
- [8] <http://www.invalsi.it>



# Ringraziamenti

I ringraziamenti più sinceri sono quelli che rivolgerò personalmente alle persone che mi stanno accanto da una vita e, in particolare, in questi due anni intensi che sono stati molto importanti per la mia crescita e che forse comprenderò pienamente solo fra qualche anno...:)

GRAZIE!!!



## Appendice A

### Il questionario

## QUESTIONARIO

**NOME**

**COGNOME**

**ETA'**

Quanto ti piace la Matematica?    ☐ per niente    ☐ poco    ☐ abbastanza    ☐ molto

Hai mai affrontato in classe argomenti di Probabilità e statistica? Se sì, quali?

Che cos'è per te la Probabilità? A cosa serve?

Che cos'è per te la Statistica? A cosa serve?

Perché, secondo te, la Probabilità e la Statistica vengono affrontate insieme o comunque in parallelo? Cosa hanno in comune?

Ci sono delle attività della vita di tutti i giorni in cui ritieni sia utile avere qualche conoscenza di Probabilità o Statistica? Se sì, quali?

**A1.** Nella tabella che vedi sono riportati i dati relativi alla distribuzione di alunni e insegnanti nella scuola secondaria di primo grado in Italia.

| Aree geografiche | Scuole | Classi | Alunni<br>(compresi i ripetenti) |         | Ripetenti           |         | Insegnanti |
|------------------|--------|--------|----------------------------------|---------|---------------------|---------|------------|
|                  |        |        | Maschi e<br>femmine              | Femmine | Maschi e<br>femmine | Femmine |            |
| <b>ITALIA</b>    | 7939   | 82446  | 1 727 339                        | 826 869 | 51 407              | 16 199  | 212 041    |
| <b>Nord</b>      | 3 381  | 33 131 | 711 292                          | 339 508 | 19 615              | 5 679   | 86 312     |
| <b>Centro</b>    | 1 358  | 14 656 | 312 700                          | 150 098 | 8 066               | 2 508   | 36 570     |
| <b>Sud</b>       | 3 200  | 34 659 | 703 347                          | 337 263 | 23 726              | 8 012   | 89 159     |

Sulla base dei dati in tabella, indica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

|           |   | Vero                     | Falso                    |
|-----------|---|--------------------------|--------------------------|
| <b>a.</b> | Nel Nord gli alunni maschi sono meno delle femmine      | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| <b>b.</b> | In Italia il rapporto insegnanti/classi è inferiore a 3 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| <b>c.</b> | Nel Sud ci sono mediamente più di 10 classi per scuola  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**A2.** La seguente tabella riporta il peso alla nascita, suddiviso in 4 classi, di 30 neonati:

| Classi di peso (in kg)    | Numero neonati |
|---------------------------|----------------|
| Da 1 kg e fino a 2 kg     | 7              |
| Più di 2 kg e fino a 3 kg | 8              |
| Più di 3 kg e fino a 4 kg | 12             |
| Più di 4 kg e fino a 5 kg | 3              |

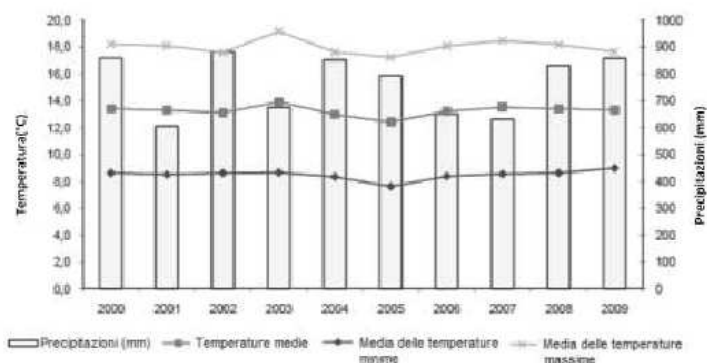
Quale delle seguenti espressioni devi usare per trovare il peso medio dei 30 neonati?

- ☐ A.  $\frac{1,5 + 2,5 + 3,5 + 4,5}{30}$
- ☐ B.  $\frac{7 + 8 + 12 + 3}{4}$
- ☐ C.  $\frac{1,5 \cdot 7 + 2,5 \cdot 8 + 3,5 \cdot 12 + 4,5 \cdot 3}{30}$
- ☐ D.  $\frac{1,5 \cdot 7 + 2,5 \cdot 8 + 3,5 \cdot 12 + 4,5 \cdot 3}{4}$



**A3.** Osserva il seguente grafico che rappresenta l'andamento delle temperature (scala a sinistra) e delle precipitazioni piovose (scala a destra) in Italia negli ultimi anni.

Figura 1. Media annua della temperatura media, massima e minima giornaliera e precipitazioni totali annue in Italia. Anni 2000-2009 (temperatura in gradi Celsius e precipitazioni in millimetri)



Indica per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa o se non si può ricavare dal grafico (metti una crocetta per ciascuna riga).

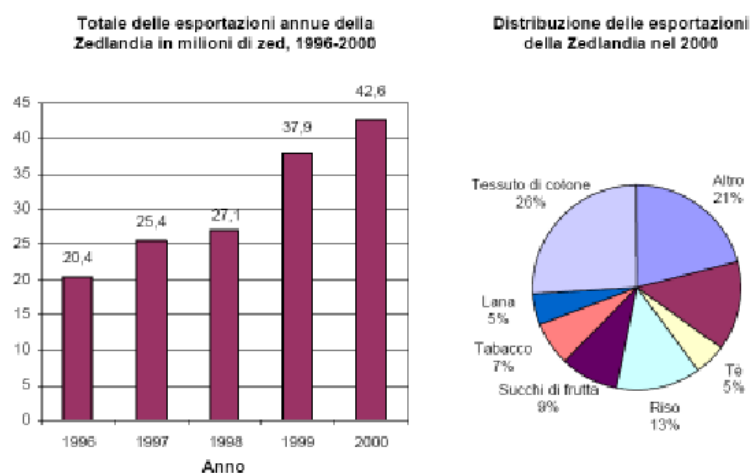
|    |   | Vero                     | Falso                    | Non si può ricavare      |
|----|---|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| a. | Nel decennio 2000-2009 la temperatura media annua è risultata più alta di 0,8 gradi rispetto al periodo 1971-2000           | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| b. | L'anno 2003 è quello in cui si è registrato il più alto valore per la media delle temperature massime                       | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| c. | L'anno 2005 è quello in cui si è registrato il più alto valore per la media delle temperature minime                        | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| d. | L'anno in cui la media delle temperature massime è stata più alta è anche quello in cui le precipitazioni sono state minori | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| e. | L'anno 2005 è quello in cui c'è stato il giorno più freddo  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| f. | Il 2004 è stato l'anno più piovoso  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**A4.** La corriera passa alle 6:30 alla fermata dove sale Giorgio. Nel 40% dei casi è in orario, nel 50% dei casi ha un ritardo di 5 minuti e nei rimanenti casi ha un ritardo di 10 minuti. Se Giorgio arriva alla fermata alle 6:34, che probabilità ha di prendere la corriera?

- [ ] A. 10%  
 [ ] B. 40%  
 [ ] C. 50%  
 [ ] D. 60%

Descrivi il ragionamento che ti ha portato alla risposta.

**A5. I seguenti grafici forniscono alcune informazioni sulle esportazioni della Zedlandia, un Paese in cui si usa lo zed come moneta corrente.**



**Qual è stato l'ammontare totale (in milioni di zed) delle esportazioni della Zedlandia nel 1998?**

Risposta: .....

**Quale è stato l'ammontare delle esportazioni di succhi di frutta della Zedlandia nel 2000?**

- ☐ A 1,8 milioni di zed  
☐ B 2,3 milioni di zed  
☐ C 2,4 milioni di zed  
☐ D 3,4 milioni di zed  
☐ E 3,8 milioni di zed

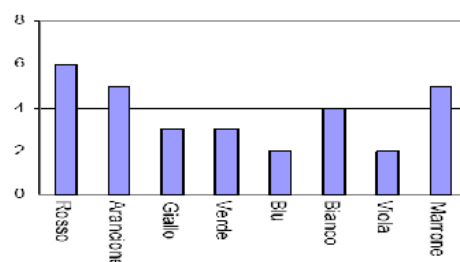
**A6. Nella scuola di Martina, l'insegnante di scienze fa delle verifiche nelle quali il punteggio massimo è 100. Martina ha un punteggio medio di 60 nelle sue prime quattro verifiche di scienze. Alla quinta verifica, prende 80.**

**Qual è la media dei punteggi in scienze di Martina dopo tutte e cinque le verifiche?**

Media: .....

Descrivi il procedimento che ti ha condotto al risultato.

**A7.** La mamma permette a Roberto di prendere una caramella da un sacchetto. Roberto non può vedere le caramelle. Il seguente grafico mostra il numero di caramelle di ciascun colore che ci sono nel sacchetto.



Qual è la probabilità che Roberto prenda una caramella di colore rosso?

- ☐ A 10%  
☐ B 20%  
☐ C 25%  
☐ D 50%

Descrivi il ragionamento che ti ha portato alla risposta.

**A8.** Il grafico seguente mostra i risultati di una verifica di scienze, ottenuti da due gruppi di studenti, indicati come Gruppo A e Gruppo B. Il punteggio medio del Gruppo A è 62,0 e quello del Gruppo B è 64,5. Per avere la sufficienza, gli studenti devono ottenere almeno 50 punti.

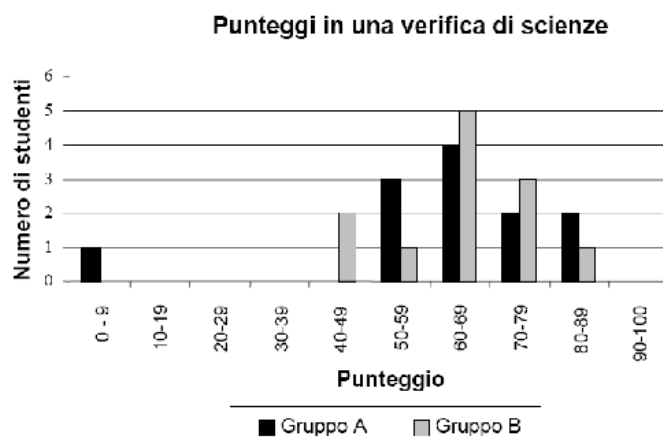


Figura A.5:

In base a questo grafico, l'insegnante sostiene che, nella verifica, il Gruppo B è andato meglio del Gruppo A.

Gli studenti del Gruppo A non sono d'accordo con l'insegnante. Essi cercano di convincere l'insegnante che il Gruppo B non è necessariamente andato meglio.

Con l'aiuto del grafico, suggerisci agli studenti del Gruppo A una spiegazione matematica che potrebbero usare.

Risposta.

---

**A9.** Giovanni ha lanciato una moneta 9 volte ottenendo in totale 6 croci e 3 teste.

Se lanciassi nuovamente la moneta:

☐ è più probabile che esca croce.

☐ è più probabile che esca testa.

☐ testa e croce hanno la stessa probabilità di uscita.

☐ dovrei conoscere esattamente l'ordine dei risultati dei primi nove lanci per poter rispondere.

Motiva la tua risposta.

---

**A10.** Giovanni lancia una moneta più volte. Nelle tabelle seguenti vengono rappresentati i risultati delle prove in ordine di apparizione ("T" rappresenta testa e "C" croce).

a) T C T C T C T C T

Se lanciassi nuovamente la moneta:

☐ è più probabile che esca croce.

☐ è più probabile che esca testa.

☐ testa e croce hanno la stessa probabilità di uscita.

b) T T C C T C T T T

Se lanciassi nuovamente la moneta:

☐ è più probabile che esca croce.

☐ è più probabile che esca testa.

☐ testa e croce hanno la stessa probabilità di uscita.

Figura A.6:

c) C C C C C C C C C C

Se lanciassi nuovamente la moneta:

- ☐ è più probabile che esca croce.  
☐ è più probabile che esca testa.  
☐ testa e croce hanno la stessa probabilità di uscita.

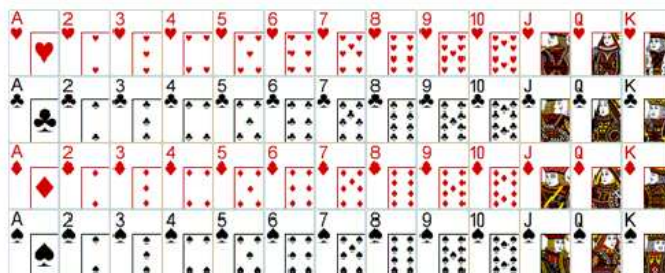
A11. In figura vengono rappresentati gli sviluppi di quattro dadi. Supponiamo di lanciare il dado 100 volte e di sommare i risultati consecutivi.

| Dado A | Dado B | Dado C | Dado D |
|--------|--------|--------|--------|
| 0      | 3      | 2      | 5      |
| 4 0 4  | 3 3 3  | 2 2 2  | 1 1 1  |
| 4      | 3      | 6      | 5      |
| 4      | 3      | 6      | 5      |

Con quale dado è più conveniente giocare?

Motiva la tua risposta.

A12. Consideriamo un mazzo di 52 carte classico come quello esposto in figura.



È più probabile pescare una carta di cuori o una figura? Perché?

Giovanni e Carlo si sfidano: Giovanni vince se esce o una carta di cuori o una figura, Carlo vince altrimenti. Su chi scommetteresti e perché?

Figura A.7: